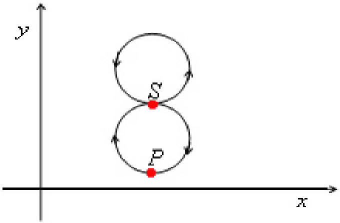
Otonom bir sistemin yörüngesi asla **kendini kesmez**. Bunun nedeni, dx/dt ve dy/dt bir noktada bütünüyle o noktanın koordinatları ile belirlenir. Eğer yörünge bu noktaya ileriki bir zamanda tekrar geri dönerse, dy/dx eğimi bu noktada iki farklı zamanda aynı olur. Böylece hareket doğrultusu her iki zamanda da aynıdır. Sonuç: eğer bir yörünge bir düzgün noktada başlıyorsa; yörünge asla başlama noktasına dönmez, veya aynı noktaya döner ve aynı kapalı eğriden tekrar tekrar geçer.



Şekil: Eğer yörünge P de başlarsa, S ye ilk ulaştığında teğet doğru pozitif eğime, ikinci defa ulaştığında ise negatif eğime sahip olur. Bu eğri bir otonom sistemin yörüngesi olamaz.

Example

$$\left\{ \frac{dx}{dt} = -y, \ \frac{dy}{dt} = x; \ x(0) = 1, \ y(0) = 0 \right\}$$

sisteminin yörüngesini bulalım. Sistemden, $dy/dx = -x/y$ olup, çözümü $x^2 + y^2 = c$ dir. Başlangıç koşullarını kullanırsak $c = 1$ buluruz. Böylece sistemin yörüngesi $x^2 + y^2 = 1$ çemberidir.

Eğer bir yörünge bir kritik noktadan başlamıyorsa, asla bir kritik noktaya ulaşamaz, fakat düzgün bir noktada başlayıp, kritik noktaya asimptotik olarak yaklaşabilir.

Example

$$\left\{ \frac{dx}{dt} = -x, \ \frac{dy}{dt} = -y \right\}$$

sisteminin kritik noktası $(0,0)$ dır ve

$$\{x \equiv y \equiv 0, -\infty < t < \infty\}$$

çözümüne karşılık gelir. Bir başka çözüm

$$\left\{x(t) = e^{-t} = y(t), \ -\infty < t < \infty\right\}$$

olup, bu çözüm de $x, y \geq 0$ bölgesinde $y = x$ yörüngesini verir. $\lim_{t\to\infty} e^{-t} = 0$ olduğundan, bu yörüngenin noktaları $(0,0)$ kritik noktasına asimptotik olarak yaklaşırlar.

Yarışma Modeli

Farklı türlerin aynı yiyecek kaynağını paylaştığı lojistik durumu iki tür için gözönüne alalım. Türlerin nüfusunu P_1 ve P_2 ile gösterirsek, lojistik model olarak

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1}{dt} = r_1 P_1 (1 - \frac{P_1}{K_1}) \\ \\ \dfrac{dP_2}{dt} = r_2 P_2 (1 - \frac{P_2}{K_2}) \end{cases}$$

sistemini yazabiliriz. Bu denklemler birbirlerinden bağımsız olup asimptotik olarak $P_1 \to K_1$ ve $P_2 \to K_2$ dir. Eğer P_1 nüfusu K_1 den ve P_2 nüfusu da K_2 den çok küçük ise bu durumda çevrede her iki tür için de yeterince yiyecek kaynağı var olup, nüfuslar r_1 ve r_2 oranında üstel olarak büyürler.

Eğer türler yarış halindelerse, bir türün nüfusunun büyümesi, diğer türün yiyecek kaynaklarını azaltır. Bu nedenle modeli türlerin birbirlerine etkisini de göz önüne alarak

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1}{dt} = r_1 P_1 \left(1 - \dfrac{P_1 + \alpha P_2}{K_1}\right) \\ \dfrac{dP_2}{dt} = r_2 P_2 \left(1 - \dfrac{\beta P_1 + P_2}{K_2}\right) \end{cases} \tag{31}$$

şeklinde yenileyebiliriz. Burada α ve β boyutsuz parametreler olup, bir türün diğer türün kaynağını kullanmasını modellemektedirler. Örneğin iki tür de aynı kaynaktan besleniyorlarsa ve örneğin birinci tür diğerinin iki katı yiyecek tüketiyorsa, bu durumda $\alpha = 1$ ve $\beta = 2$ olur.

Eğer tüketimin eşit olduğunu varsayarsak, model

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1}{dt} = r_1 P_1 \left(1 - \dfrac{P_1 + P_2}{K_1}\right) \\ \dfrac{dP_2}{dt} = r_2 P_2 \left(1 - \dfrac{P_1 + P_2}{K_2}\right) \end{cases} \tag{32}$$

şeklini alır. Genelliği bozmaksızın $K_1 > K_2$ kabul edersek, denge nüfusları $(P_1, P_2) = (0, 0)$, $(P_1, P_2) = (K_1, 0)$ ve $(P_1, P_2) = (0, K_2)$ olur.

Sistemin kararlılık analizi için;

$$g(P_1,P_2)=r_1P_1\left(1-\frac{P_1+P_2}{K_1}\right)\qquad f(P_1,P_2)=r_2P_2\left(1-\frac{P_1+P_2}{K_2}\right)$$

olup, $(P_{1e},P_{2e})=(K_1,0)$ için

$$a=\frac{\partial g(P_{1e},P_{2e})}{\partial P_1}=-r_1,\quad b=\frac{\partial g(P_{1e},P_{2e})}{\partial P_2}=-r_1,$$

$$c=\frac{\partial g(P_{1e},P_{2e})}{\partial P_1}=0,\quad d=\frac{\partial g(P_{1e},P_{2e})}{\partial P_1}=r_2\left(1-K_1/K_2\right)$$

ve böylece

$$\begin{aligned}
p &= a+d=-r_1+r_2\left(1-K_1/K_2\right)<0,\\
q &= -r_1r_2\left(1-K_1/K_2\right)>0,\\
\Delta &= p^2-4q=\left(r_1+r_2\left(1-K_1/K_2\right)\right)^2>0
\end{aligned}$$

olup, $(K_1,0)$ noktası **kararlıdır**. Benzer işlemle $(0,K_2)$ nin **kararsız** olduğu gösterilebilir.

Kararlılık analizini daha basit şekilde aşağıdaki gibi de yapabiliriz: $(P_1, P_2) = (K_1, \varepsilon)$ alalım. $K_1 > K_2$ kabul ettiğimiz için (32) den $P_2' < 0$ olup, bunun anlamı P_2 nin yokolmasıdır. O halde $(K_1, 0)$ noktası kararlıdır. Şimdi $(P_1, P_2) = (\varepsilon, K_2)$ alalım. Yine (32) den bu kez $P_1' > 0$ olup, P_1 nüfusu artar. O halde $(0, K_2)$ kararsız bir denge noktasıdır.
Böylece, aynı çevreyi payşaşan ve aynı oranda kaynak tüketen türler aynı anda varolamazlar ve daha büyük taşıma kapasitesine sahip olan tür diğer türün yokolmasına neden olur. Bu durum **tamamlayıcı dışlama** veya büyük taşıma kapasiteli tür kazandığı için $K-$**ayıklanması** olarak adlandırılır. Aslında bazı α ve β değerleri için (31) modelinin, iki türün birlikte varolmasını sağlayacak şekilde denge çözümlerine sahip olduğu, benzer kararlılık analizi ile gösterilebilir. İki türün birlikte varolması için bir yeter koşul $K_2 < K_1/\alpha$ ve $K_1 < K_2/\beta$ olmasıdır.