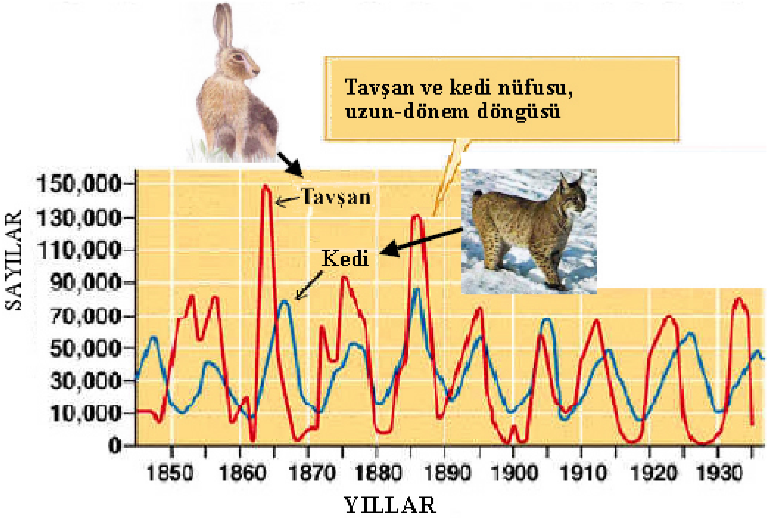
Av–Avcı Modeli

- Aynı çevreyi paylaşan iki veya daha çok biyolojik nüfus arasındaki etkileşim: **av–avcı**
- Avcılar avları yiyerek karnını doyurur. Avlar ise çevrede mevcut bulunan daha başka yiyeceklerle karnını doyurur:
- Vaşak - tavşan: tavşanlar ormanda belirli bitkileri yerken, vaşaklar tavşanları yer.

- İlk deneysel çalışma Kanada'da Hudson Bay firmasının vaşak ve tavşan nüfusunu incelemesi:
  - Firma, vaşak ve tavşan nüfusunu ölçmek için tuzak kurarak, tuzağa yakalananların yıllık sayılarını kaydetmiştir. Veriler, ilginç bir şekilde, nüfusta bir periyodik değişimin olduğunu göstermiştir.



Şekil: Kanada'da vahşi kedi ve tavşan nüfuslarında gözlemlenen salınımlar. (Veriler E.P. Odum'un Fundamentals of Ecology, 1953 kitabından alınmıştır)

Klasik av–avcı matematiksel modeli, İtalyan Matematikçi **Vito Volterra** (1860 – 1940) tarafından geliştirilmiştir (1920 li yıllarda, Adriyatik Denizinde, köpek balığı ve yedikleri balık nüfusunda gözlenen döngüsel değişimlerin analizi).
Türler arasındaki ilişkiyi göz ardı edelim.

$$\begin{aligned} F &= \text{belli bir balık türünün sayısı,} \\ S &= \text{köpekbalığı sayısı} \end{aligned}$$

Bölgeyi dışa göç olmayacak, veya göç önemsiz olacak, şekilde sınırlı kabul edelim. Balıklar plankton yediklerinden, köpekbalıklarını gözardı ederek, balıkların nüfus artış oranını sabit kabul edebiliriz. Böylece,

$$\frac{dF}{dt} = aF$$

olur. Eğer, nüfus yeterince büyük bir noktaya gelirse, lojistik büyüme modeli

$$\frac{dF}{dt} = aF - bF^2,$$

(taşıma kapasitesi a/b) önerilebilir.

Köpekbalıklarının büyüme oranının yemleri olan balıkların sayısı ile orantılı arttığını kabul edelim. Yani,

$$\frac{1}{S}\frac{dS}{dt} = -k + \lambda F$$

olsun. Böylece balıkların çoğalma oranı, köpekbalıklarının nüfusu ile orantılı olur. Yani,

$$\frac{1}{F}\frac{dF}{dt} = a - bF - cS$$

dir. Böylece av-avcı türleri için, 1920 li yıllarda birbirlerinden bağımsız olarak Lotka ve Volterra' nın çalıştığı,

$$\frac{dF}{dt} = (a - bF - cS)F \tag{1}$$

$$\frac{dS}{dt} = (-k + \lambda F)S, \tag{2}$$

Lotka-Volterra sistemini elde ederiz. Burada, a, b, c, k ve λ pozitif sabitlerdir.

Sonsuz plankton kaynağı olduğu varsayılırsa, $b = 0$ olur. Bu model tek av-avcı modeli değildir fakat en basit olanlardan biridir. Şimdi, (1) denkleminde $b = 0$ kabul edelim. Böylece,

$$\frac{dF}{dt} = (a - cS)F \tag{3}$$

olur. Buradan,

$$S \text{ nin } \begin{cases} > a/c \\ = a/c \\ < a/c \end{cases} \text{ olması, balık nüfusunun } \begin{cases} \text{yok olması} \\ \text{değişmemesi} \\ \text{artması} \end{cases} \text{ demektir.}$$

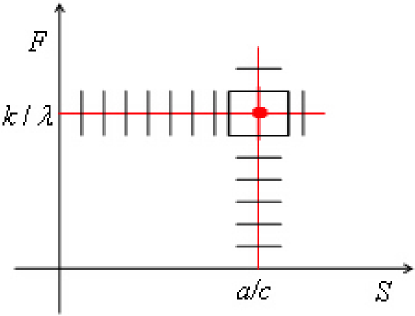
Benzer şekilde, (2) denkleminden

$$F \text{ nin } \begin{cases} > k/\lambda \\ = k/\lambda \\ < k/\lambda \end{cases} \text{ olması, köpekbalığı nüfusunun } \begin{cases} \text{artması} \\ \text{değişmemesi} \\ \text{yok olması} \end{cases} \text{ demektir.}$$

Başlangıçta çok az sayıda köpekbalığı olduğunu varsayalım. (3) denklemine göre balık sayısı artar. Balık sayısı artarken (2) denkleminden köpekbalığı sayısı artar. Köpekbalığı sayısı yeterince büyük olursa, balıkların büyüme oranı negatif olur. Bu durumda balık sayısı azalır ve bu döngü devam eder.
Genel olarak (2)-(3) sisteminin t ye göre elemanter fonksiyonlar cinsinden elde edilebilen açık bir çözümü yoktur. O halde

$$\frac{dF}{dS} = \frac{F(a - cS)}{S(\lambda F - k)} \tag{4}$$

faz düzlem denklemini göz önüne alalım. Öncelikle, F ve S nin her ikisinin de pozitif olması gerektiğinden, (2)-(3) sisteminin negatif nüfus gösteremeyeceğini gerçekleyelim. Dikkat edilirse $F = 0 = S$ çözüm olduğu gibi, aynı zamanda basit eşyönlülerdir. Dahası, $F = 0$, $dF/dS = 0$ a ve $S = 0$ da $dF/dS = \infty$ a karşılık gelir. Böylece, F ve S pozitif ise, asla negatif olamaz, çünkü bunun için ya F ya da S eksenini kesmek zorundadır ve bu da olanaksızdır. Diğer basit eşyönlüler sırası ile $dF/dS = 0$ ve $dF/dS = \infty$ a karşılık gelen $S = a/c$ ve $F = k/\lambda$ doğrularıdır.



Şekil: Bir av-avcı modeli için basit eşyönlüler.

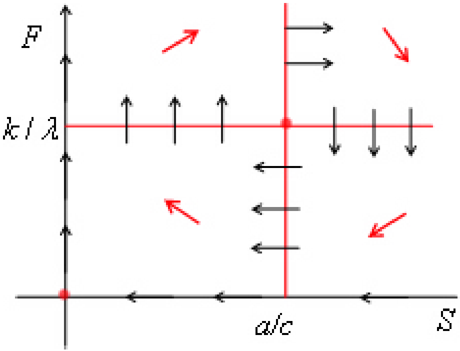
Faz düzlem denkleminin iki olası aykırı noktası vardır:

$$F = \frac{k}{\lambda}, \ S = \frac{a}{c} \tag{5}$$

$$F = 0, \ S = 0. \tag{6}$$

Bunlar zamana bağlı modelin denge noktasına karşılık gelirler. (6) ile verilen sıfır nüfusu bizim için ilgi çekici değildir.

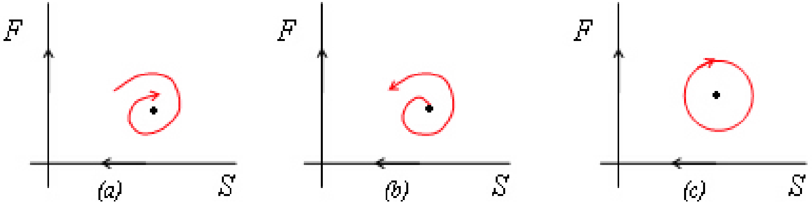
Şimdi, $(S = a/c,\ F = k/\lambda)$ noktasının bir kararlı denge nüfusu olduğunu gösterelim.
(4) denkleminin denge noktası a, c, k ve λ parametrelerinin hepsine birden bağlıdır. Fakat sadece k/λ ve a/c oranları belirgin bir öneme sahiptir.
Şimdi, (4) modelini eşyönlülerden dikkatlice inceleyelim: Eğer balığın sayıca büyüme oranı a artarsa, balığın denge nüfusu değişmez kalır, ve sadece köpekbalığı etkilenir. Artan sayıdaki köpekbalıkları ise, balık doğumlarının artmasını engeller.
Eğer köpekbalığının ölüm oranı k azalırsa, bu sadece köpekbalıklarının denge nüfusunu etkilemediği gibi, daha garibi, avlarının denge sayısı azalır. Bunun anlamı, daha zor olan köpekbalığı nüfusunu dengelemek için daha az balık gereklidir.
Köpekbalığının, balık öldürme yeteneğine karşılık gelen c değerinin artması, köpekbalıklarında azalmaya yol açar. Köpekbalıkları için daha fazla besin anlamına gelen λ değerini artırmak, köpekbalıklarının artmasına yol açtığı gibi, balık sayısının da azalmasına yol açar; yani avcının yeterliliğini artırmak avın denge sayısının azalması demektir.



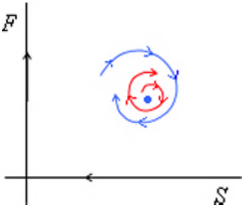
Şekil: Av-avcı modelinin niteliksel davranışı.

$dF/dS = 0$ veya $dF/dS = \infty$ a karşılık gelen eşyönlüler oldukça kullanışlıdır. Çünkü bunlar türün azaldığı veya arttığı bölgeleri birbirinden ayırırlar.

Genel olarak faz düzlem denklemi saat doğrultusunda bir yapı gösterir. En az üç tür olası yörünge vardır.

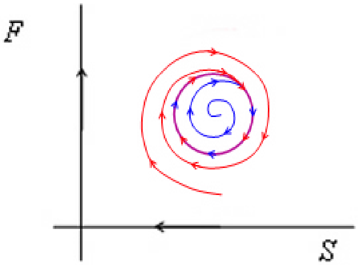


Şekil: Olası yörüngeler.



Şekil: Yörüngeler

Balık ve köpekbalıkları nüfusu bir salınım sonrasında kendi denge noktalarına yaklaşmalarına rağmen, bir çözüm eğrisi parçası içe doğru spiral çiziyor; belli bir zamandan sonra balık ve köpekbalıklarının nüfuslarının artmasına rağmen, diğer bir çözüm eğrisi parçası da dışa doğru spiral çiziyor. Eğer bu geçerli ise, bunların arasında bir çözüm eğrisinin var olacağını umabiliriz şöyle ki; bu çözüm için nüfuslar aynı değere dönerek, peryodik bir salınıma neden olurlar. Bu duruma bir **limit döngü** denir



Şekil: Limit döngü.

(2)-(3) modelinde bir limit döngü **olamayacağını** gösterelim. Denge noktasında pertürbasyon yöntemi ile lineerleştirme yapılırsa,

$$F = \frac{k}{\lambda} + \epsilon F_1, \quad S = \frac{a}{c} + \epsilon S_1$$

(2)-(3) denklemlerinde yazılıp lineer olmayan terimler yok edilirse

$$\begin{cases} \dfrac{dF_1}{dt} = -\frac{ck}{\lambda} S_1 \\[2ex] \dfrac{dS_1}{dt} = \frac{a\lambda}{c} F_1 \end{cases} \tag{7}$$

olup, $F_1(0) = F_{10}$, $S_1(0) = S_{10}$ başlangıç koşulları altında çözümü (Laplace dönüşümü ile)

$$\begin{cases} F_1(t) = F_{10} \cos \sqrt{ak}t - \frac{c}{\lambda}\sqrt{\frac{k}{a}} S_{10} \sin \sqrt{ak}t \\ S_1(t) = -\frac{\lambda}{c}\sqrt{\frac{k}{a}} F_{10} \sin \sqrt{ak}t + S_{10} \cos \sqrt{ak}t \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1(t) = F_{10}\cos\sqrt{ak}t - \frac{c}{\lambda}\sqrt{\frac{k}{a}}S_{10}\sin\sqrt{ak}t \\ \\ S_1(t) = -\frac{\lambda}{c}\sqrt{\frac{k}{a}}F_{10}\sin\sqrt{ak}t + S_{10}\cos\sqrt{ak}t \end{cases}$$

çözümleri balık ve köpekbalıkları sayılarının, dairesel frekansları $\sqrt{ak}$ olmak üzere, denge nüfusları etrafında salınım yaptıklarını gösterir. Salınımın peryodu $T = 2\pi/\sqrt{ak}$ olup, sadece a ve k büyüme oranlarına bağlıdır. $1/T$ ise birim zamandaki *titreşim sayısını* yani *frekansı* verir.

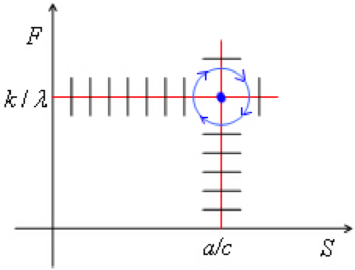
(7) denklemlerinden

$$\frac{dF_1}{dS_1} = -\frac{kc^2}{a\lambda^2}\frac{S_1}{F_1}$$

olup, bu denklem $F_1(0) = F_{10}$, $S_1(0) = S_{10}$ başlangıç koşulları altında çözülerek

$$F_1^2 + \frac{kc^2}{a\lambda^2}S_1^2 = F_{10}^2 + \frac{kc^2}{a\lambda^2}S_{10}^2$$

yörüngesi elde edilir ki bu bir elipstir. Bu durumdaki denge noktasına bir **merkez** denir.



Şekil: Av-avcı faz düzlem salınımı.

$F_1(t)$ çözümünü

$$F_1(t) = A\sin(wt+\alpha), \quad w = \sqrt{ak} \tag{8}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada **genlik** olarak adlandırılan A ve **faz kayması** olarak adlandırılan α belirlenecek olan sabitlerdir.

$$F_1(t) = A\sin wt\cos\alpha + A\cos wt\sin\alpha) = F_{10}\cos\sqrt{ak}t - \frac{c}{\lambda}\sqrt{\frac{k}{a}}S_{10}\sin\sqrt{ak}t$$

olduğundan, $A\cos\alpha = -\frac{c}{\lambda}\sqrt{\frac{k}{a}}S_{10}$ ve $A\sin\alpha = F_{10}$ ve buradan

$$A = \sqrt{F_{10}^2 + \frac{kc^2}{a\lambda^2}S_{10}^2} \tag{9}$$

ve

$$\tan\alpha = -\sqrt{\frac{a}{k}}\frac{\lambda F_{10}}{cS_{10}} \tag{10}$$

olur.