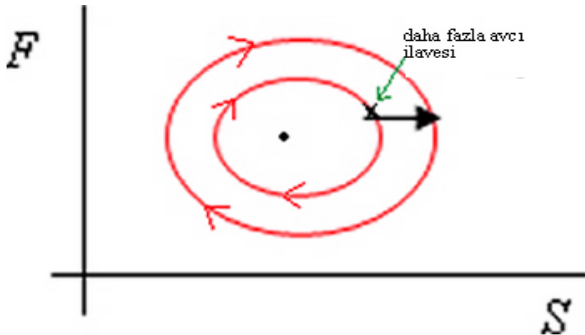


Eğer, daha fazla avcı eklersek, (2)-(3) modelinden nasıl bir sonuç üretebiliriz?



Şekil: Ortama aniden daha fazla avcı ekleme etkisi.

Bu durum salınımın genliğinin artmasına neden olabilir. Ortalama nüfuslar denge nüfusları olduklarından, aynı kalırlar.

Eğer, nüfusları ile orantılı olarak, örneğin tuzak kurarak veya zehir kullanarak, her iki nüfus da azaltılırsa bu durumda ne olur? Bu durumda  $\gamma$  ve  $\delta$  sabitler olmak üzere, yeni model

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= (a - cS)F - \gamma F \\ \frac{dS}{dt} &= -(k + \lambda F)S - \delta S\end{aligned}$$

şeklini alır. Böylece, av ve avcı için yeni denge nüfusları, sırası ile

$$\frac{k + \delta}{\lambda} \text{ ve } \frac{a - \gamma}{c}$$

olur. **Bu ise avın artması ve avcının azalması demektir.** O halde, halihazırda doğal avcılar tarafından kontrol altında tutulan av nüfusunu azaltmaya çalışmak, aslında çoğalmalarına yardım etmek demektir.



Aşağıdaki örnek olay bu durumu açıklamaya yeterli olacaktır: 1868 yılında Avusturalya'da yaşayan bir böcek türü kazayla Amerika Birleşik Devletlerine taşınır ve bu böcek Amerikan turunçgil endüstrisini tehdit etmeye başlar. Böcekten kurtulmak için, Avusturalyadan onun avcısı olan uğurböcekleri ithal edilir. Uğurböcekleri, bu böcekleri bağıl olarak düşük bir düzeye çekmeyi başarırlar. Daha sonraları, böcekleri yok etmek için DDT keşfedildiğinde, sayılarını daha fazla azaltmak için DDT kullanılmaya başlanır. Fakat bu ilaç uğurböcekleri için de öldürücü olduğu için, ilacın kullanımı sonucu zararlı böcek sayısının arttığı görülmüştür.



Çoğu avcı, birden çok tür ile beslenir. Çoğalma için doğal avlarının olması tercih nedeni olmasına rağmen, eğer avcılar alternatif bir kaynaktan da besleniyorsa, bu durumda olası bir alternatif model,

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= (a - bF - cS)F \\ \frac{dS}{dt} &= (\alpha - \beta S + \lambda F)S\end{aligned}$$

sistemidir.  $b = 0 = \beta$  ve  $a = \alpha$  durumunda, model

$$\frac{dF}{dt} = (a - cS)F \quad (20)$$

$$\frac{dS}{dt} = (a + \lambda F)S \quad (21)$$

olup, çözümü

$$S(t) = \frac{(\lambda F_0 + cS_0)e^{at}}{\lambda \frac{F_0}{S_0} e^{\frac{\lambda F_0 + cS_0}{a}(1-e^{at})} + c}$$

$$F(t) = \frac{(\lambda F_0 + cS_0)e^{at}}{\lambda + c \frac{S_0}{F_0} e^{\frac{\lambda F_0 + cS_0}{a}(e^{at}-1)}}$$



**Durum 1.**  $a > 0$  :

$\lambda$  ve  $c (> 0)$  ile verilen etkileşimden bağımsız olarak  $t \rightarrow \infty$  için  $F(t) \rightarrow 0$  ve  $S(t) \rightarrow \infty$  dur. Bunun anlamı, etkileşim durumunda av ve avcı aynı pozitif büyüme oranına sahip olduğu zaman, av yok olacaktır.

**Durum 2.**  $a = 0$  :

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} F(t) = \frac{(\lambda F_0 + c S_0)}{\lambda + c \frac{S_0}{F_0} e^{(\lambda F_0 + c S_0)t}} \quad \lim_{a \rightarrow 0^+} S(t) = \frac{(\lambda F_0 + c S_0)}{\lambda \frac{F_0}{S_0} e^{-(\lambda F_0 + c S_0)t} + c}$$

olup,  $t \rightarrow \infty$  için  $F(t) \rightarrow 0$  ve  $S(t) \rightarrow \frac{(\lambda F_0 + c S_0)}{c}$  dir.

**Durum 3.**  $a < 0$  :

$t \rightarrow \infty$  için  $F(t) \rightarrow 0$  ve  $S(t) \rightarrow 0$  dir.



## Karmaşa

$$\frac{dP}{dt} = (r - sP)P = rP(1 - P/K) \quad (22)$$

lojistik modeli Euler yöntemi ile çözersek

$$\begin{aligned} P(t+h) &\approx P(t) + hP'(t) \\ &= P(t) + h(r - sP(t))P(t). \end{aligned} \quad (23)$$

$t = t_0$  başlangıç anından başlayarak ardışık zaman periyodlarını  $t_{n+1} = t_n + h$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) ile ve karşılık gelen nüfusları da  $P(t_n + h)$  ile gösterirsek

$$P(t_{n+1}) = P(t_n + h) \approx P(t_n) + h(r - sP(t_n))P(t_n)$$

olup, ardışık iterasyonlardan elde edilen  $P(t_{n+1})$  değerini  $P_{n+1}$  ile gösterirsek

$$P_{n+1} = P_n + h(r - sP_n)P_n, \quad (n = 1, 2, 3\dots) \quad (24)$$

ile elde edilen  $P_{n+1}$ ,  $t_{n+1}$  zamanındaki gerçek nüfus  $P(t_{n+1})$  e bir yaklaşım verir.



Şimdi öyle bir nüfus kabul edelim ki, (24) itersyonlarını kullanarak hesaplanan  $P_{n+1}$  yaklaşımlarının  $P(t_{n+1})$  gerçek nüfus değerlerine yeterince yakın olacak şekilde bir  $h$  adım uzunluğu seçilebilsin. Örneğin bu, düzenli periyodlarla kısa süreli üreme sezonlarına sahip hayvan nüfuslarında uygulanabilir.  $h$ , arka arkaya gelen üreme sezonları arasındaki aralık kabul edilirse, bu durumda bir üreme sezonundaki  $P_n$  nüfusu sadece bir önceki sezon boyunca  $P_{n-1}$  nüfusuna bağlı olur ve  $P_n$ , bir sonraki üreme sezonundaki  $P_{n+1}$  nüfusunu tam olarak belirleyebilir.



(24) denkleminde  $a = 1 + hr$  ve  $b = hs$  yazılırsa

$$\begin{aligned}
 P_{n+1} &= P_n + h(r - sP_n)P_n \\
 &= (1 + hr)P_n - hsP_n^2 \\
 &= (a - bP_n)P_n
 \end{aligned} \tag{25}$$

denklemi elde edilir ki bu **lojistik fark denklemi** olarak adlandırılır. Son olarak, (25) denkleminde

$$P_n = \frac{a}{b}x_n \tag{26}$$

alınırsa,

$$x_{n+1} = a(1 - x_n)x_n \tag{27}$$

basit formu elde edilir.





## Limit döngü

$$x_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

var olduğunu kabul ederek,  $x_{\infty}$  un  $a$  büyüme parametresine ne şekilde bağlı olduğunu araştıralım. Yani  $a$  yı işlemlerde girdi ve  $x_{\infty}$  u ise çıktı olarak kabul ederek, çıktının girdiye ne şekilde bağlı olduğunu inceleyelim. Belli bir  $x_0$  değerinden başlayarak (27) iterasyonlarını bulunduğu aşağıdaki tablo sonuçları elde edilir:



$a$	$\lim x_n$
1.5	0.3333
1.7	0.4118
1.9	0.4737
2.0	0.5000
2.2	0.5455
2.5	0.6000
2.8	0.6429
2.9	0.6552
3.1	0.7646 0.5580
3.3	0.8236 0.4794
3.4	0.8422 0.4520
3.5	0.8270 0.3828 0.8750 0.5009
3.52	0.8233 0.3731 0.8795 0.5121
3.54	0.8203 0.3648 0.8833 0.5218



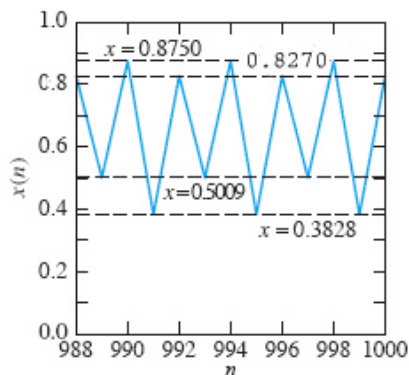
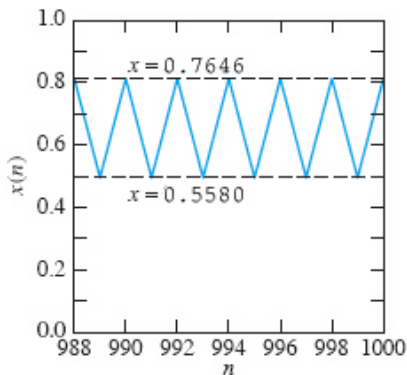
$a$	$\lim x_n$
3.55	0.8278 0.3703 0.8817 0.5405 0.8127 0.3548 0.8874 0.5060
3.56	0.8333 0.3738 0.8808 0.5509 0.8086 0.3488 0.8899 0.4945
3.565	0.8332 0.3724 0.8815 0.5523 0.8083 0.3475 0.8905 0.4860
	0.8372 0.3769 0.8799 0.55659 0.80649 0.3457 0.8912 0.4954
3.57	kaos
3.597	0.8993 0.5008 0.8328 0.3641 0.8857 0.4386 0.8579
	0.3927 0.8753 0.4183 0.8657 0.5967 0.7900 0.3257
3.599	kaos
3.60	0.8972 0.5275 0.8216 0.3525 0.9000 0.4474 0.8546 0.3877
	0.8772 0.5794 0.7984 0.3320
3.61	kaos
3.835	0.958634 0.494515 0.152075
3.842	0.9602 0.4919 0.1507 0.9591 0.4809 0.1467
3.848	0.9616 0.5096 0.1571 0.9574 0.4652 0.1407
	0.9620 0.5016 0.1541 0.9582 0.4686 0.1419 →kaos



Tablodan görüldüğü gibi  $x_0 = 0.5$  başlangıç nüfus kesiri ile başladığında  $a$  parametresinin  $1.5 < a < 3$  değerleri için (27) iterasyonları yakınsak olup  $(x_n)$  belli bir  $x_\infty$  değerine yakınsar (örneğin  $a = 1.5$  için  $x_n \rightarrow 0.33$  olur).  $a > 3$  için  $(x_n)$  dizisinin iki farklı noktaya (alterne) yakınsadığını görürüz (örneğin  $a = 3.10$  için  $x_n \rightarrow 0.5580$  ( $n$  tek) ve  $x_n \rightarrow 0.7646$  ( $n$  çift) olur). Yani, yaklaşık olarak  $3 < a < 3.5$  için *iki nüfuslu* bir **limit döngü** vardır.  $a = 3.5$  olduğunda,  $(x_n)$  nin bu kez 4 farklı nüfusa yaklaştığını, yani "**periyodun ikiye katlandığını**" farkediyoruz  $a = 3.55$  de 8 periyodlu,  $a = 3.565$  de 16 periyodlu limit döngülerin oluştuğunu görmekteyiz. Peki bu periyod katlaması bu düzenle mi devam eder?  $a \rightarrow 3.570$  için parçalanmaların çok hızlı bir şekilde katlanarak bir **karmaşaya** gittiğini görmekteyiz. Daha ilginç olan,  $a = 3.59$  ile  $a = 3.60$  arasında ondört periyodlu bir döngü ve katlı parçalanmalarını,  $a = 3.60$  ile  $a = 3.61$  arasında oniki periyodlu bir döngü ve katlı parçalanmalarını ve aralık duyarlılığını artırarak, örneğin son olarak,  $a = 3.83$  yakınlarında kaostan dönülerek bu kez **üç limitli** bir döngünün ortaya çıktığını ve  $a = 3.9$  a kadar tekrar altı, oniki, yirmidört vs. periyodlu bölünmeler oluştuğunu görebiliriz.



Üç periyodlu döngünün görülmesi önemlidir, çünkü 1975 yılında J.York ve T.Y.Li, "üç periyodlu bir döngünün" varlığının; her sayıda periyodik döngünün yanısıra, hiç periyodik olmayan kaotik döngülerin de varlığına işaret ettiğini ispatlamışlardır. "Üç periyod kaosa götürür".



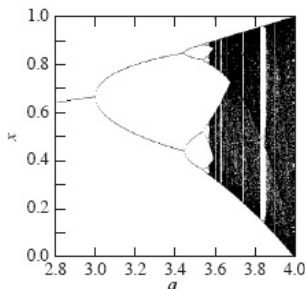
Şekil: İki ve dört nüfuslu limit döngü



Kaos hakkında vurgulanmaya değer son nokta; fizikçi M. Feigenbaum'um 1970 li yıllarda keşfettiği *Feigenbaum sabiti*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} = 4.66920160981\dots$$

dir. Bu, kaotik davranışın da aslında bir düzen içerdiğini göstermektedir.



**Şekil:**  $x_0 = 0.5$  için yaba görüntüsü. Dikey beyaz boşluklarda kaostan dönülüp tekrar limit döngüler başlar.



