1.2.3 Pareto Dağılımı

X rastgele değişkeninin dağılımı $Pareto(\alpha, \lambda)$ olsun. ($X \sim Pa(\alpha, \lambda)$). X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{\alpha\lambda^{\alpha}}{(\lambda + x)^{\alpha+1}} \quad , x > 0, \qquad \alpha > 0, \qquad \lambda > 0$$

biçimindedir. Dağılım fonksiyonu,

$$F(x) = \int_0^x \frac{\alpha\lambda^{\alpha}}{(\lambda + y)^{\alpha+1}} dy = \alpha\lambda^{\alpha} \int_0^x \frac{1}{(\lambda + y)^{\alpha+1}} dy$$

$$= \alpha\lambda^{\alpha} \int_0^x (\lambda + y)^{-(\alpha+1)} dy = \alpha\lambda^{\alpha} \frac{(\lambda + y)^{-\alpha-1+1}}{-\alpha - 1 + 1} \Big|_{y=0}^{x}$$

$$= \lambda^{\alpha}(\lambda + y)^{-\alpha} \Big|_{y=0}^{x} = \lambda^{\alpha}(\lambda + x)^{-\alpha} + \lambda^{\alpha}(\lambda)^{-\alpha}$$

$$= 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{\alpha} \quad , \quad x > 0$$

olarak elde edilir.

Beklenen değeri aşağıda verildiği gibi bulunabilir.

$$E(X) = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} [(x + \lambda) - \lambda] f(x) dx$$

$$= \int_0^{\infty} (x + \lambda) f(x) dx - \int_0^{\infty} \lambda f(x) dx$$

$$= \int_0^{\infty} (x + \lambda) f(x) dx - \lambda \int_0^{\infty} f(x) dx$$

$$= \int_0^\infty (x+\lambda)f(x)dx - \lambda.1 = \int_0^\infty (x+\lambda)f(x)dx - \lambda$$

$$= \int_0^\infty (x+\lambda)\frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}dx - \lambda$$

$$= \int_0^\infty \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^\alpha}dx - \lambda$$

Yukarıdaki integral $\frac{(\alpha-1)\lambda}{(\alpha-1)\lambda}$ ile çarpıp bölünürse,

$$= \int_0^\infty \frac{(\alpha-1)\lambda}{(\alpha-1)\lambda}\frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^\alpha}dx - \lambda$$

$$= \frac{\alpha\lambda}{(\alpha-1)}\int_0^\infty \frac{(\alpha-1)\lambda^{\alpha-1}}{(\lambda+x)^\alpha}dx - \lambda$$

yukarıdaki integralin içindeki ifade $Pareto(\alpha-1,\lambda)$ dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Dolayısıyla integralin değeri 1'dir. O halde X rastgele değişkeninin beklenen değeri

$$E(X) = \frac{\alpha\lambda}{(\alpha-1)} - \lambda = \frac{\alpha\lambda - \lambda(\alpha-1)}{(\alpha-1)} = \frac{\alpha\lambda - \alpha\lambda + \lambda}{(\alpha-1)} = \frac{\lambda}{(\alpha-1)}\ , \quad \alpha > 1$$

olarak bulunur.

X rastgele değişkeninin varyansını bulabilmek için önce ikinci moment bulunmalıdır.

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 f(x)dx = \int_0^\infty [(x+\lambda)-\lambda]^2 f(x)dx$$

$$= \int_0^\infty [(x+\lambda)^2 - 2(x+\lambda)\lambda + \lambda^2]f(x)dx$$

$$= \int_0^\infty [(x+\lambda)^2 - 2x\lambda - \lambda^2]f(x)dx$$

$$= \int_0^\infty (x+\lambda)^2 f(x)dx - 2\lambda \int_0^\infty xf(x)dx - \lambda^2 \int_0^\infty f(x)dx$$

yukarıda kırmızı ile gösterilen integral $Pareto(\alpha, \lambda)$ dağılımının beklenen değeridir, yani integralin sonucu $\frac{\lambda}{\alpha-1}$'dir. Mavi ile gösterilen integralin sonucu 1 olduğundan yukarıdaki eşitlik aşağıdaki gibi yazılır:

$$= \int_0^\infty (x+\lambda)^2 f(x)dx - 2\lambda \frac{\lambda}{\alpha-1} - \lambda^2$$

$$= \int_0^\infty (x+\lambda)^2 \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}} dx - \frac{2\lambda^2}{\alpha-1} - \lambda^2$$

$$= \int_0^\infty \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha-1}} dx - \frac{2\lambda^2}{\alpha-1} - \lambda^2$$

Yukarıdaki integral $\frac{(\alpha-2)\lambda^2}{(\alpha-2)\lambda^2}$ ile çarpıp bölünürse,

$$= \int_0^\infty \frac{(\alpha-2)\lambda^2}{(\alpha-2)\lambda^2} \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha-1}} dx - \frac{2\lambda^2}{\alpha-1} - \lambda^2$$

$$= \frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha-2)} \int_0^\infty \frac{(\alpha-2)\lambda^{\alpha-2}}{(\lambda+x)^{\alpha-1}} dx - \frac{2\lambda^2}{\alpha-1} - \lambda^2$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki integralin içindeki ifade $Pareto(\alpha-2, \lambda)$ dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Dolayısıyla integralin değeri 1'dir. O halde Pareto dağılımının ikinci momenti

$$E(X^2) = \frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha-2)} - \frac{2\lambda^2}{\alpha-1} - \lambda^2 = \frac{2\lambda^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)}$$

olarak elde edilir. O halde varyans

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2\lambda^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} - \left(\frac{\lambda}{\alpha-1}\right)^2 = \frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$$

olur.

1.2.4 Normal Dağılım

X rastgele değişkeninin dağılımı $Normal(\mu,\sigma)$ olsun. $(X \sim N(\mu,\sigma^2))$. X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\} \quad , -\infty < x < \infty$$

biçimindedir.

$X \sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ dönüşümü yapıldığında $Z \sim N(0,1)$ olur. Z rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}x^2\right\} dx$$

olur.(Standart normal dağılım)

X rastgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu

$$M_X(t) = \exp\left\{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\},$$

beklenen değer ve varyansı

$$E(X) = \mu\,, \quad Var(X) = \sigma^2$$

biçimindedir.