1.4.2 Aşan Kayıp Reasüransı

Aşan kayıp reasürans anlaşmasında hasar, retenşın sınırını(M) geçtiğinde sigorta şirketi ve reasürans şirket arasında paylaşılır, aksi halde reasürans hepsini öder.

M: retenşın sınırı

Y → Sigorta şirketi tarafından ödenen miktar

Z → Reasürans tarafından ödenen miktar

olmak üzere Y ve Z 'nin matematiksel gösterimi aşağıdaki gibidir:

$Y = \min(X, M)$

$Z = \max(0, X - M)$

(Y+Z=X olduğuna dikkat ediniz.)

<u>Sigorta şirketi açısından</u>

Y'nin dağılım fonksiyonu F_Y ile gösterilirse, Y'nin tanımından dağılım fonksiyonu

$$F_Y(x) = \begin{cases} F(x), & x < M \\ 1, & x \geq M \end{cases}$$

biçiminde yazılır. Bu durumda Y rastgele değişkeni, $f(x)$, $0 < x < M$ olasılık yoğunluk fonksiyonu ve $P(Y = M) = 1 - F(M)$ olasılığı ile M de ki olasılık fonksiyonundan oluşan karma dağılıma sahiptir.

Y, X'in bir fonksiyonu olduğundan Y'nin momentleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$E(Y^n) = \int_0^\infty [\min(X, M)]^n f(x)dx$$

$0 < x < M$ iken $\min(X, M) = X$, $x \geq M$ iken $\min(X, M) = M$ olduğundan, yukarıdaki integrali 2 parçaya bölünerek yazılır. O zaman n. moment

$$E(Y^n) = \int_0^M x^n f(x)dx + \int_M^\infty M^n f(x)dx$$
$$= \int_0^M x^n f(x)dx + M^n \int_M^\infty f(x)dx$$
$$= \int_0^M x^n f(x)dx + M^n[1 - F(M)]$$

biçiminde yazılır. Özel olarak $n = 1$ alındığında beklenen değer aşağıdaki gibi elde edilir.

$$E(Y) = \int_0^M xf(x)dx + M[1 - F(M)]$$

Örnek: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x},\ x \geq 0$ ve $Y = \min(X, M)$olsun. $E(Y)$'yi bulunuz.

Çözüm:

$$E(Y) = \int_0^M xf(x)dx + M[1 - F(M)]$$
$$= \int_0^M x\lambda e^{-\lambda x}dx + M\left[1 - 1 + e^{-\lambda M})\right]$$
$$= \lambda \int_0^M xe^{-\lambda x}dx + Me^{-\lambda}$$
$$= \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda M}\right)$$

<u>Reasürans açısından</u>

X: Hasar miktarı

Z: Reasürans şirketin ödeyeceği miktar

$$Z = \max(0, X - M) = \begin{cases} 0, & X \leq M \\ X - M, & X > M \end{cases}$$

$F_Z(0) = M$ ve $F_Z(x) = F(x + M),\ x > 0$

Z'nin n'inci momenti aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$E(Z^n) = \int_0^\infty [\max(0, X - M)]^n f(x)dx$$

$$= \int_0^M 0 f(x)dx + \int_M^\infty (x - M)^n f(x)dx = \int_M^\infty (x - M)^n f(x)dx$$

$$\Longrightarrow E(Z^n) = \int_M^\infty (x - M)^n f(x)dx$$

Örnek: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x},\ x \geq 0$ ve $Z = \max(0, X - M)$olsun. $E(Z)$'yi bulunuz.

Çözüm:

$$E(Z) = \int_M^\infty (x - M)f(x)dx = \int_M^\infty (x - M)\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$\left\{\begin{matrix} x - M = y & x = M \Longrightarrow y = 0 \\ dx = dy & x = \infty \Longrightarrow y = \infty \end{matrix}\right\}$$

$$= \int_0^\infty y\lambda e^{-\lambda(M+y)}dy = e^{-\lambda M}\int_0^\infty y\lambda e^{-\lambda y}dy$$

λ parametreli üstel dağılımın beklenen değeri

$$= e^{-\lambda M}\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda M}$$

1.5 Rastgele Değişkenlerin Toplamı

Birçok sigorta uygulamasında birbirinden bağımsız ve aynı dağılımlı rastgele değişkenlerin dağılımı ile ilgilenilir. Örneğin sigorta şirketinin n tane poliçesi olsun. X_i: i.poliçede meydana gelen hasar miktarını göstersin ($i = 1,2,\dots,n$). Bu durumda sigorta şirketi, n poliçedeki hasarlar için toplam

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i\,, \qquad i = 1,2,\dots,n \quad X_i' \textit{ler birbirinden bağımsız aynı dağılımlı}$$

miktarını öder. Buradaki temel konu S_n'nin dağılımının bulunmasıdır. S_n'nin kapalı formu mevcutsa S_n'nin dağılımı aşağıdaki iki yolla bulunabilir.

1.5.1 Moment Çıkaran Fonksiyon Yöntemi

M_S: S'nin moment çıkaran fonksiyonu

M_X: X'in moment çıkaran fonksiyonu olsun.

$$\begin{aligned}
M_S(t) = E(e^{tS_n}) &= E\left(e^{t(X_1+X_2+\cdots+X_n)}\right) \\
&= E(e^{tX_1}e^{tX_2} \dots e^{tX_n}) \\
&= E(e^{tX_1})E(e^{tX_2}) \dots E(e^{tX_n}) \\
&= M_X(t)M_X(t) \dots M_X(t) \\
&= [M_X(t)]^n
\end{aligned}$$

Örnek: $X_1 \sim Poisson(\lambda)$ olsun. $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$'nin dağılımı nedir?

Çözüm:

$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$$

$$M_S(t) = [M_X(t)]^n = \left[e^{\lambda(e^t-1)}\right]^n = e^{n\lambda(e^t-1)}$$

$\Rightarrow S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Poisson(n\lambda)$ olur.