4. KOLEKTİF RİSK MODELİ

Kısa dönemde toplam hasar miktarı ile ilgilenilir(örneğin 1 yıl). Toplam hasar miktarı S rastgele değişkeni ile gösterilir. Burada S'nin dağılım fonksiyonu ve momentleri elde edilecektir.

4.1 Model

S rastgele değişkeni bir yıllık dönemde meydana gelen hasarların toplamı,

N bir yıllık dönemde meydana gelen hasar sayısı

olsun.

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

$N = 0$ iken $S = 0$ olur (hiç hasar yokken toplam hasar sıfır olur)

Bu noktada iki önemli varsayım yapılmıştır:

1. $\{X_i\}_{i=1}^{N}$ birbirinden bağımsız ve aynı dağılımlı
2. N, $\{X_i\}_{i=1}^{N}$'den bağımsız.

4.1.1 *S*'nin Dağılımı

$G(x) = P(S \leq x)$ → Toplam hasarın dağılım fonksiyonu

$F(x) = P(X_1 \leq x)$ →Bireysel hasar miktarlarının dağılım fonksiyonu

$p_n = P(N = n), \{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ → Hasar sayısının olasılık fonksiyonu

$(S \leq x) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{S \leq x \text{ ve } N = n\}$ biçiminde gösterilir.

$$G(x) = P(S \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{S \leq x \text{ ve } N = n\}$$

$$P\{S \leq x \text{ ve } N = n\} = P\{S \leq x \,|N = n\}P(N = n)$$

$$P\{S \leq x \,|N = n\} = P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq x\right) = F^{n*}(x)$$

Böylelikle $x \geq 0$ için,

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{n*}(x)$$

elde edilir. Burada $F^{0*}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & dy \end{cases}$ dır.

Tam sayı değer alan bireysel hasar miktarı durumunda ise olasılık fonksiyonu

$$f_j = F(j) - F(j-1), \qquad j = 1,2,3, \ldots$$

olsun. S'nin olasılık fonksiyonu $\{g_x\}_{x=0}^{\infty}$

$$g_x = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_X^{n*}, \qquad g_0 = p_0, \qquad x = 1,2,3, \ldots$$

olarak verilir. Burada $f_X^{n*} = P(\sum_{i=1}^{n} X_i = x)$'dir.

4.1.2 *S*'nin Momentleri

Koşullu beklenen değer yardımıyla hesaplanabilir. Y ve Z momentleri olan iki rastgele değişken olsun.

$$E[Y] = E\big[E[Y|Z]\big]$$

$$Var(Y) = E\big[Var[Y|Z]\big] + Var\big[E[Y|Z]\big]$$

O halde S'nin beklenen değeri

$$E[S] = E\big[E[S|N]\big]$$

olur.

$m_k = E\left({X_1}^k\right),\ k = 1,2,3,\dots$ olsun. $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ olduğundan

$$E[S|N = n] = E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = nm_1$$

dolayısıyla

$$E[S|N] = Nm_1$$
$$E\big[E[S|N]\big] = E[Nm_1] = E[N]m_1$$

olur, yani beklenen toplam hasar miktarı, beklenen hasar sayısı ile her bir hasarın beklenen değerinin çarpımına eşittir.

Benzer şekilde,

$$Var[S|N = n] = Var\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] = n(m_2 - {m_1}^2)$$

$$Var[S|N] = N(m_2 - {m_1}^2)$$

Bu ifade koşullu varyans tanımında yerine konursa,

$$\begin{aligned} Var(S) &= E\big[Var[S|N]\big] + Var\big[E[S|N]\big] \\ &= E[N(m_2 - {m_1}^2)] + Var[Nm_1] \\ &= E[N](m_2 - {m_1}^2) + Var[N]{m_1}^2 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Aynı şekilde S'nin moment çıkaran fonksiyonu elde edilebilir:

$$M_S(t) = E[e^{tS}] = E\big[E[e^{tS}|N]\big]$$

$$E[e^{tS}|N = n] = E\left[\exp\left\{t\sum_{i=1}^{N} X_i\right\}\right] = \prod_{i=1}^{n} E[\exp\{tX_i\}], \qquad X_i'\text{ler bağımsız}$$

$$E[e^{tS}|N=n] = [M_X(t)]^n, \qquad X_i'\text{ler aynı dağılımlı}$$

Burada $M_X(t) = E[\exp\{tX_1\}]$'dir. O halde

$$M_S(t) = E[M_X(t)^N] = E[\exp\{\log M_X(t)^N\}]$$
$$= E[\exp\{N \log M_X(t)\}]$$
$$M_S(t) = M_N[\log M_X(t)]$$

Benzer şekilde X kesikli rastgele değişkeni negatif olmayan tam sayılarda tanımlı olduğunda P_x olasılık çıkaran fonksiyonu kullanılarak

$$P_S(r) = P_N[P_X(r)]$$

yazılır.