3.2.5 Sıfır Fayda Prensibi

Sigortanın fayda fonksiyonu $u(x)$ olsun ve $u'(x) > 0$ ve $u''(x) < 0$ özelliklerini sağlasın.

$$u'(w) = E[u(w + \Pi_X - X)]$$

Dolayısıyla prim w'ya bağlıdır.

İstisna: $u(w) = -\exp\{-\beta x\}, \quad \beta > 0$ olduğunda w'ya bağlı olmaz

$\Pi_X = \beta^{-1} log\, E[\exp\{-\beta x\}]$ üstel prensip

i. $u'(w) = E[u(w + \Pi_X - X)] \leq u(w + \Pi_X - E(X))$

   $u'(x) > 0$ olduğundan $\Pi_X > E(X)$ 'dir.

ii. Toplamsallık üstel durum hariç sağlamaz

$$\begin{aligned}\Pi_{X_1+X_2} &= \beta^{-1} logE[\exp\{\ \beta(X_1 + X_2)\}] \\ &= \beta^{-1} logE[\exp\{\beta_1 X_1\}] E[\exp\{\beta X_2\}] \\ &= \beta^{-1} logE[\exp\{\beta X_1\}] + \beta^{-1} logE[\exp\{\beta X_2\}] \\ &= \Pi_{X_1} + \Pi_{X_2}\end{aligned}$$

iii. $u(x) = -\exp\{-\beta X\} \quad X{\sim}N(\mu, \sigma^2) \qquad Y = \alpha X, \quad \alpha > 0$

$$\Pi_X = \beta^{-1} logE[\exp(\beta X)] = \beta^{-1}\left(\beta\mu + \frac{\sigma^2\beta^2}{2}\right) = \mu + \frac{\sigma^2\beta}{2}$$

$\Pi_Y = \alpha\mu + \frac{\alpha^2\sigma^2\beta^2}{2} \neq \alpha\Pi_X$ olduğundan sağlanmaz.

iv. $Y = X + c$ iken Π_Y

$$\begin{aligned}u(w) &= E[u(w + \Pi_Y - Y)] = E[u(w + \Pi_Y - X - c)] \\ &= E[u|w(w + \Pi_Y - c - X)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Pi_Y = \Pi_X + c$$

v. No-ripoff $w + \Pi_X - X \geq w + \Pi_X - xm$

$u(w) = E[u(w + \Pi_X - X)] \geq E[u(w + \Pi_X - xm)] = u(w + \Pi_X - xm)$

$u'(x) > 0$ olduğundan $\Pi_X - x_m \leq 0$

3.2.6 Esscher Prensibi

Esscher prim ilkesi aşağıda verilmektedir.

$$\Pi_X = \frac{E[Xe^{hX}]}{E[e^{hX}]}, h > 0$$

X, $(0, \infty)$'da f yoğunluk fonksiyonuna sahip bir r.d. olduğu varsayılsın ve g fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın.

$g(x) = \frac{e^{hx} f(x)}{\int_0^\infty e^{hx} f(x) dx}$ $\quad$ $\tilde{X}$ r.d. nin yoğunluk fonksiyonu

$G(x) = \frac{\int_0^x e^{hy} f(y) dy}{M_X(h)}$ $\quad$ h parametreli F'nin Esscher dönüşümü

$\tilde{X}$ rastgele değişkeninin beklenen değeri Esscher primini vermektedir. Önce $\tilde{X}$'nın moment çıkaran fonksiyonu elde edilsin.

$$M_{\tilde{X}}(t) = \int_0^\infty e^{tx} g(x) dx$$

$g(x)$ yerine yazılırsa, $\tilde{X}$'nın moment çıkaran fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır:

$$M_{\tilde{X}}(t) = \frac{M_X(t+h)}{M_X(h)}$$

O halde Esscher primi

$$\Pi_X = E(\tilde{X})$$

biçimindedir.

Örnek: $F(x) = 1 - \exp\{-\lambda x\}$, $x > 0$ olsun. h parametreli F'nin Esscher dönüşümünü bulunuz. $(h < \lambda)$

Çözüm: $X \sim F \Rightarrow M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$

$$M_{\tilde{X}}(t) = \frac{M_X(t+h)}{M_X(h)} = \frac{\lambda/(\lambda - t - h)}{\lambda/(\lambda - h)}$$

$$= \frac{\lambda - h}{\lambda - t - h}$$

$\lambda - h$ parametreli üstel dağılımın moment çıkaran fonksiyonu

O halde $\tilde{X} \sim Exp(\lambda - h)$'dır.

$\tilde{X}$'nın dağılım fonksiyonu,

$$G(x) = 1 - \exp\{-(\lambda - h)x\}$$

ve $\tilde{X}$'nın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$g(x) = (\lambda - h)\exp\{-(\lambda - h)x\}$$

olur.

Örnek: $X \sim \ddot{U}stel\ (\lambda = 1), h < 1$ parametreli Esscher prensibine göre primi bulunuz.

Çözüm: Önceki örnekte üstel dağılımının Esscher dönüşümü $(\lambda - h)$ parametreli üstel olarak bulunumuştu. $\lambda = 1$ olduğundan Esscher primi,

$$\Pi_X = E(\tilde{X}) = \frac{1}{1 - h}$$

olur.

Özellikleri sağlayıp sağlamadığına bakılsın.

i. Esscher prensibi negatif olmama özelliğini sağlar. Bu durum şu şekilde gösterilir.

$h = 0$ için $\quad M_{\tilde{X}}(t) = \frac{M_X(t+h)}{M_X(h)}$

$$M_{\tilde{X}}(t) = \frac{M_x(t)}{M_x(0)}$$

Dolayısıyla $E(\tilde{X}) = E(X) = \Pi_X$

$h \geq 0$ için $E[\tilde{X}^r] = \frac{d^r M_{\tilde{X}}(t)}{dt^r} \Big|_{t=0}$

$$= \frac{d^r}{dt^r} \frac{M_X(t+h)}{M_X(h)} \Big|_{t=0} = \frac{{M_X}^r(h)}{M_X(h)}$$

ve böylece

$$\frac{d}{dh}\Pi_X = \frac{d}{dh}\mathrm{E}(\tilde{\mathrm{X}}) = \frac{d}{dh}\frac{M'_X(h)}{M_X(h)}$$

$$= \frac{1}{\left(M_X(h)\right)^2} M_X^{(2)}.M_X(h) - (M_X'(h))^2$$

$$= \frac{M_X^{(2)}(h)}{M_X(h)} - \left(\frac{M_X'(h)}{M_X(h)}\right)^2$$

$$= \mathrm{E}(\tilde{\mathrm{X}}^2) - \left(\mathrm{E}(\tilde{\mathrm{X}})\right)^2 \geq 0$$

olur. Böylelikle Π_X, h'nin artan bir fonksiyonudur. $h \geq 0$ için $\Pi_X \geq E(X)$ olduğundan negatif olmama özelliği sağlanmıştır.

ii. Esscher prensibi tutarlıdır çünkü $Y = X + c$

$$\Pi_Y = \frac{E[Ye^{hY}]}{E[e^{hY}]} = \frac{E[(x+c)e^{h(X+c)}}{E[e^{h(X+c)}]}$$

$$= \frac{E[Xe^{hX}]e^{hc} + c.E[e^{hX}]e^{hc}}{E[e^{hX}]e^{hc}} = \frac{E[Xe^{hX}]}{E[e^{hX}]e^{hc}}$$

$$= \frac{E[Xe^{hX}]}{E[e^{hX}]} + c$$

$$\Rightarrow \Pi_Y = \Pi_{X+c}$$

iii. Toplamsaldır.

$$\Pi_{X_1+X_2} = \frac{E\left[(X_1+X_2)e^{h(X_1+X_2)}\right]}{E\left[e^{h(X_1+X_2)}\right]} = \frac{E(X_1e^{hX_1})E(e^{hX_2}) + E(e^{hX_1})E(X_2e^{hX_2})}{E(e^{hX_1})E(e^{hX_2})}$$

$$= \frac{E(X_1e^{hX_1})}{E(e^{hX_1})} + \frac{E(X_2e^{hX_2})}{E(e^{hX_2})}$$

$$= \Pi_{X_1} + \Pi_{X_2}$$

iv. No-ripoff sağlanır.

x_m mümkün en büyük hasar olsun. $P(X \leq x_m) = 1$

$$xe^{hx} \leq x_m e^{hx}$$

$$\Pi_X = \frac{E[Xe^{hX}]}{E[e^{hX}]} \leq \frac{E[x_m e^{hX}]}{E[e^{hX}]} = x_m$$

v. Çarpımsallık sağlanmıyor. $Z = aX$

$$\Pi_Z(h) = \frac{E[Ze^{hZ}]}{E[e^{hZ}]} = \frac{E[aXe^{haX}]}{E[e^{haX}]}$$

$$= \frac{aE[Xe^{ahX}]}{E[e^{ahX}]} = a\Pi_{aX}(h) \neq a\Pi_X(h), \qquad a \neq 1 \; için$$

3.2.7 Düzeltilmiş Risk Primi Prensibi

X negatif olmayan r.d.nin dağılım fonksiyonu F olsun. Düzeltilmiş risk primi

$$\Pi_X = \int_0^\infty [P(X > x)]^{1/\rho}\, dx$$

$$= \int_0^\infty [1 - F(x)]^{1/\rho}\, dx, \quad \rho \geq 1 \quad (\rho \text{ :Risk index})$$

dönüşüm yöntemidir. X^* negatif olmayan r.d.nin H dağılım fonksiyonu olarak tanımlansın.

$$1 - H(x) = [1 - F(x)]^{\frac{1}{\rho}}$$

$$E[X^*] = \int_0^\infty [1 - H(x)]dx$$

$$\Pi_X = E[X^*]$$

Örnek: X r.d.i ortalaması $1/\lambda$ olan üstel dağılıma sahiptir. Düzeltilmiş risk primini bulunuz.

$$1 - F(x) = e^{-\lambda}$$

$$1 - H(x) = e^{-\lambda x/\rho}$$

$\Rightarrow X^*$ ortalaması $\frac{\rho}{\lambda}$ olan üstel dağılıma sahiptir. O halde

$$\Pi_X = \frac{\rho}{\lambda}$$

olur.

Örnek : $X \sim$Pareto(α, λ). Düzeltilmiş risk primi bulunur.

$$1 - F(x) = (\frac{\lambda}{\lambda + x})^\alpha$$

$$F(x) = 1 - (\frac{\lambda}{\lambda + x})^\alpha$$

$$1 - H(x) = (\frac{\lambda}{\lambda + x})^{\alpha/\rho}$$

$$\Rightarrow X^* \sim Pareto\left(\frac{\alpha}{\rho}, \lambda\right) \Rightarrow \ \Pi_X = \frac{\rho\lambda}{\alpha\lambda}\ , \ \rho < \alpha$$

Toplamsallık dışında tüm özellikleri taşır.

i. $\Pi_X \geq E(X) \quad \rho \geq 1$

$$1 - F(x) \leq [1 + F(x)]^{1/\rho}, \qquad x \geq 0$$

$$E(X) = \int_0^\infty [1 - F(x)]dx$$

$\Pi_X \geq E(X)$

ii. $Y = X + C$

$$P(Y > x) = \begin{cases} 1, & x < c \\ 1 - F(x-c), & x \geq c \end{cases}$$

$$\Pi_Y = \int_0^\infty [P(Y > x)]^{1/\rho} dx$$
$$= \int_0^c dx + \int_c^\infty [1 - F(x-c)]^{1/\rho} dx$$
$$= c + \int_0^\infty [1 - F(y)]^{1/\rho} dy$$
$$= c + \Pi_X$$

iii. $Z = aX$

$P(Z > x) = P\left(X > \frac{x}{a}\right)$

$\Pi_Z = \int_0^\infty [P(Z > x)]^{1/\rho} dx$

$= \int_0^\infty \left[P(x > \frac{x}{a})\right]^{1/\rho} dx = a \int_0^\infty [P(X > y)]^{1/\rho} dy = a\Pi_X$

iv. No-ripoff sağlanır

$F(x_m) = 1$

$\Pi_X = \int_0^{x_m} [1 - F(x)]^{1/\rho} dx \leq \int_0^{x_m} dx = x_m$

v. Toplamsallığın sağlanmadığı ile ilgili örnek verilsin:

X_1 ve X_2 *birbirinden bağımsız aynı dağılıma sahip olsun*

$$P(X_1 = 0) = P(X_2 = 0) = 0.5 \qquad \rho = 2$$

$$\Pi_{X_1} = \Pi_{X_2} = 0.5^{\frac{1}{2}}$$

$$\Pi_{X_1+X_2} = 0.5\left(1 + 3^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow \Pi_{X_1} + \Pi_{X_2} > \Pi_{X_1+X_2}$$