

4.4 Dönem Başı ile Dönem Sonu Annüitelerin Peşin Değerleri Arasındaki İlişki

Dönem başı ile dönem sonu annüitelerin peşin değerleri arasındaki ilişki için, aşağıdaki iki eşitlik kullanılabilir.

$$1) \ddot{a}_{n|i} = (1 + i) * a_{n|i}$$

$$2) \ddot{a}_{n|i} = a_{n-1|i} + 1$$

Örnek: %2 faiz oranı ile 3 yıl boyunca her yılın başında 25\$ ödenmektedir. İlk yılın başındaki peşin değeri hesaplayınız.

1)

$$\begin{aligned} \text{Peşin Değer} &= 25 * \ddot{a}_{3|2\%} \\ &= 25 * (1.02) * a_{3|2\%} \\ &= 25 * (1.02) * (2.883883) \\ &= 73.54\$ \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \text{Peşin Değer} &= 25 * \ddot{a}_{3|2\%} \\ &= 25 * (a_{2|2\%} + 1) \\ &= 25 * (1.941561 + 1) \\ &= 73.54\$ \end{aligned}$$

Örnek: Bir sigorta şirketinin satın alma bölümü bir hesaplama makinesi almak istiyor. Bu makina 5000\$' a alınabilir ya da 10 yıl için her yılın başında olmak üzere 650\$ vererek kiralanabilir. Faiz oranı %6 olduğunda şirket makineyi satın mı almalı, kiralamalı mı?(Makinenin ömrünün 10 yıl olduğu varsayalım.)

Bu miktarları karşılaştırabilmek için, aynı tarihteki fiyatlar karşılaştırılmalıdır. Bu nedenle kira ödemelerinin peşin değeri bulunup, satın almadaki tek ödeme miktarı ile karşılaştırılmalıdır.

Kira ödemelerinin peşin değeri $650 * \ddot{a}_{10|6\%}$ 'dır.

$$\begin{aligned}
650 * \ddot{a}_{10|7\%6} &= 650 * (a_{9|7\%6} + 1) \\
&= 650 * (6.801692 + 1) \\
&= 5071.10\$
\end{aligned}$$

Kiralandığında az bir miktar daha maliyetli olduğu görülmektedir.

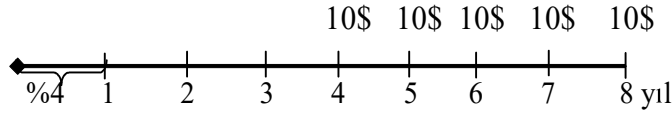
4.5 Ertelenmiş Annüitenin Peşin Değeri

İlk ödemesi bir ya da daha çok sayıda ertelen annüite, ertelenmiş annüite olarak bilinir.

Örneğin yıllık %4 faizle, 5 yıl boyunca yıllık ödemesi 10\$ olan dönem sonu annüite düşünülün. 3 yıl ertelenmiş olsun.

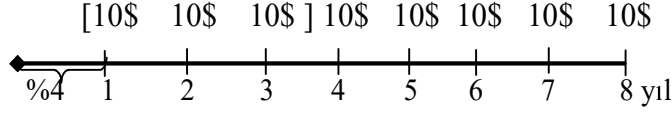
İlk ödeme ilk yılın sonunda yapılması yerine, ilk ödeme 3 yıl sonra, yani 4. yılın sonunda yapılıyor. Buna göre ilk yılın başındaki peşin değer, 3 farklı yolla hesaplanabilir.

1) Ertelenmiş annüitede peşin değeri bulmak için her bir ödemenin peşin değeri ayrı ayrı bulunarak toplanır.



$$\begin{aligned}
\text{Peşin Değer} &= 10 * v^4 + 10 * v^5 + 10 * v^6 + 10 * v^7 + 10 * v^8, (v'ler \%4) \\
&= 10 * (v^4 + v^5 + v^6 + v^7 + v^8), (v'ler \%4) \\
&= 10 * (0.844804 + 0.821927 + 0.790315 + 0.759918 + 0.730690) \\
&= 39.58\$
\end{aligned}$$

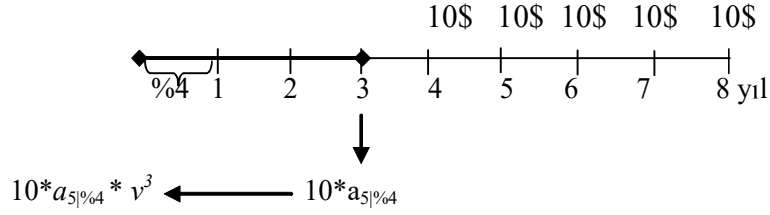
2) 1. .2 ve 3. yıl sonuna ödeme eklenir.



Toplam 8 ödeme olur. Bu 8 ödemenin peşin değeri $10 * a_{8|4\%}$ dir. İlk 3 yılın ödemelerinin peşin değeri, 8 ödemenin peşin değerinden çıkarılır.

$$\begin{aligned}
 \text{Peşin Değer} &= 10 * a_{8|4\%} - 10 * a_{3|4\%} \\
 &= 10 * (a_{8|4\%} - a_{3|4\%}) \\
 &= 10 * (6.732745 - 2.775091) \\
 &= 39.58\$
 \end{aligned}$$

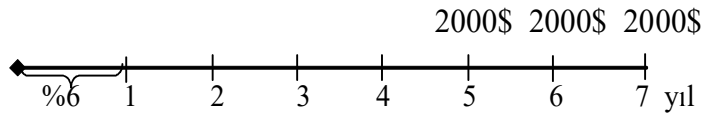
3) Burada değerlendirme günü 3 yıl sonra alınır, peşin değer hesaplanır. Daha sonra bulunan peşin değer asıl değerlendirme gününe iskontolanır.



$$\begin{aligned}
 \text{Peşin Değer} &= 10 * a_{5|4\%} * (v^3, \%4 \text{ faizle}) \\
 &= 10 * (4.451822) * (0.888996) \\
 &= 39.58\$
 \end{aligned}$$

Örnek: Bir öğrenci 4 yıllık üniversite eğitimi için %6 faizle borç alıyor ve üniversite mezuniyetinden sonra 3 yıl boyunca, her yılın sonunda 2000\$ ödemeyi kabul ediyor. Her üç yolla, bu geri ödemenin peşin değerini bulunuz.

Çizgi diyagramı



4 yıl erteleniyor, 5. yılın sonunda ilk ödeme yapılıyor.

1)

$$\begin{aligned} \text{Pekin Değer} &= 2000 * v^5 + 2000 * v^6 + 2000 * v^7 (v'ler \%6) \\ &= 2000 * (v^5 + v^6 + v^7) (v'ler \%6) \\ &= 4234.55\$ \end{aligned}$$

2)

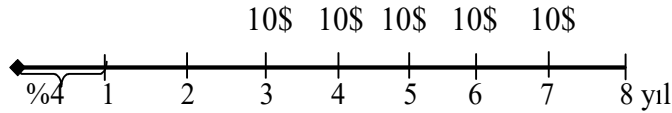
$$\begin{aligned} \text{Pekin Değer} &= 2000 * a_{7|\%6} - 2000 * a_{4|\%6} \\ &= 2000 * (a_{7|\%6} - a_{4|\%6}) \\ &= 4234.55\$ \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} \text{Pekin Değer} &= 2000 * a_{7|\%6} * (v^4, \%6) \\ &= 4234.55\$ \end{aligned}$$

Ertelenmiş dönem başı annüitede de bu 3 yolla peşin değer bulunabilir. Örneğin yıllık faiz oranı %4 ile 5 yıl boyunca yıllık ödemesi 10\$ olan, 3 yıl ertelenmiş dönem başı annüite düşünölsün.

Çizgi diyagramı



İlk ödeme ilk yılın başında yapılması yerine, ilk ödeme 3 yıl sonra yapılıyor. Ertelenmiş dönem başı annüitede peşin değer kısaca şu şekilde hesaplanır:

1)

$$\text{Pekin Değer} = 10 * (v^3 + v^4 + v^5 + v^6 + v^7) (v'ler \%4)$$

2)

$$\text{Pekin Değer} = 10 * \ddot{a}_{8|\%4} - 10 * \ddot{a}_{3|\%4}$$

3)

$$\text{Pekin Değer} = 10 * \ddot{a}_{5|\%4} * (v^3, \%4)$$

KAYNAKLAR

Bowers, N. L. Jr., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A., Nesbitt, C. J.(1997). *Actuarial Mathematics. Second Edition*, Society of Actuaries.

Moralı, N. (1997). *Hayat Sigortaları için Aktüeryal Teknikler*, Genç Sigortacılar Derneği Yayınları.

Workman, L. C. (1995). *Mathematical Foundation of Life Insurance*, Life Management Institute LOMA.