HAFTA 1: SİNYALLER

BÖLÜM 1: SİNYALLER

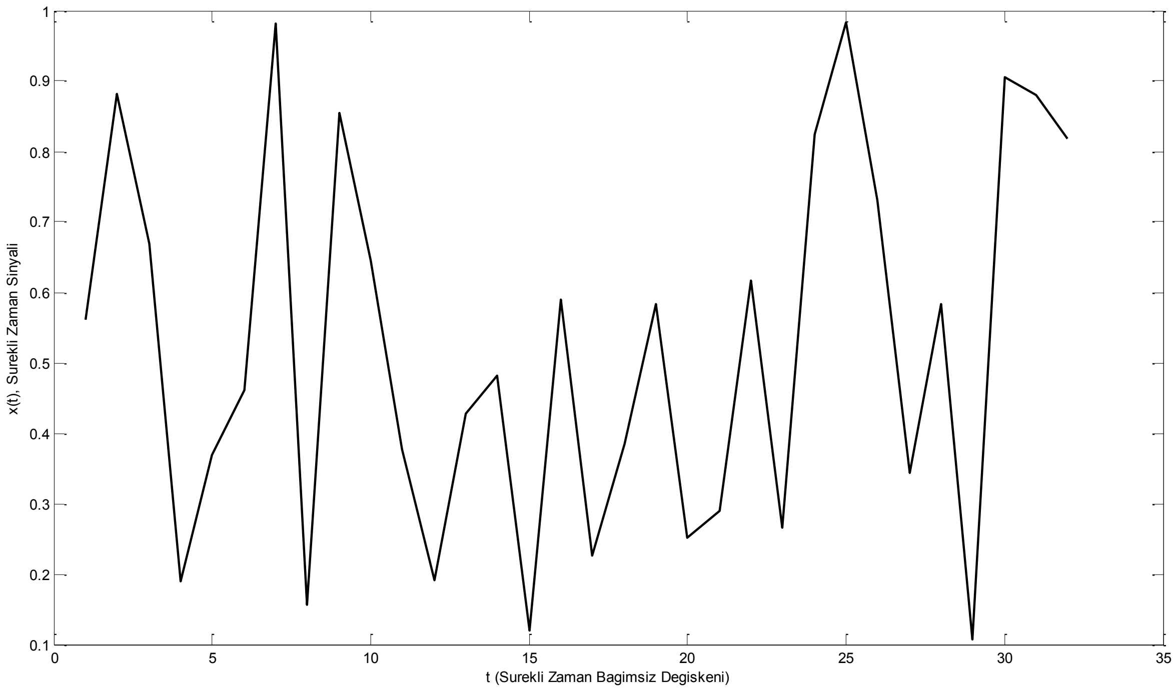
Matematik kapsamında sinyal: Bir bağımsız değişkenin mümkün olan tüm değerleri için fonksiyonun aldığı değerlerdir. Bu tanım gereğince matematikte verilen fonksiyon konuları ile Elektrik-Elektronik mühendisliği kapsamında anlatılacak olan sinyaller arasında yadsınamaz bir bağlantı vardır.

1.1 Sinyal nedir?

Elektrik-Elektronik mühendisliği kapsamında sinyal; genellikle bağımsız değişkenini zaman olan ve bu nedenle zaman içinde deterministik (belli bir kurala göre) olarak ya da rasgele (belli bir kurala ya da analitik denkleme göre tanımlanamayan) değerler dizisidir. Örnek vermek gerekirse bir sıcaklık sensörünün oda içinde ölçtüğü sıcaklık değerleri bir sinyaldir. Örneği geliştirmek istersek bu sıcaklık değerlerini oda içinde ölçülen en yüksek sıcaklık değeri ile normalize edersek (en yüksek sıcaklık değerine bölersek) sıfırın üzerindeki sıcaklık değerleri için 0 ila 1 arasında değişen bir sinyal elde etmiş oluruz. Bu sinyal için bağımsız değişken zaman, sinyal ise bu zamanlarda oda içinde ölçülen en yüksek sıcaklık değerine normalize edilmiş oran değerlerini verir. Eğer sıcaklık ölçümlerini sürekli olarak alıyorsak sinyalimiz zamanın sürekli bir fonksiyonu, günde bir kere alıyor isek sinyalimiz zamanın kesikli bir fonksiyonu (her gün için bir değer ve diğer ölçüm zamanı gelene kadar herhangi bir değer yok) olarak tanımlanacaktır.

Bu kitap kapsamında Şekil 1.1'de örnek olarak sunulan sürekli zaman sinyalleri (continuous-time signals) incelenecektir. Bu sinyaller $x(t)$ notasyonu ile ifade edilecek; x herhangi bir sinyali, t bağımsız değişken olan zamanı, yumuşak parantezler ise zaman sinyalinin sürekli olduğunu gösterecektir. Peki, bağımsız zaman değişkeni t sürekli olmakla birlikte, sinyalin aldığı değer $x(t)$ acaba sürekli midir? Bu kitap boyunca sürekli zaman sinyallerinin aldıkları değerler de sürekli olacaktır. Bu nedenle $x(t)$ sinyallerini zamanda sürekli ve genlik değerinde sürekli olmak üzere kısaca sürekli zaman sinyalleri olarak adlandırmaktayız.

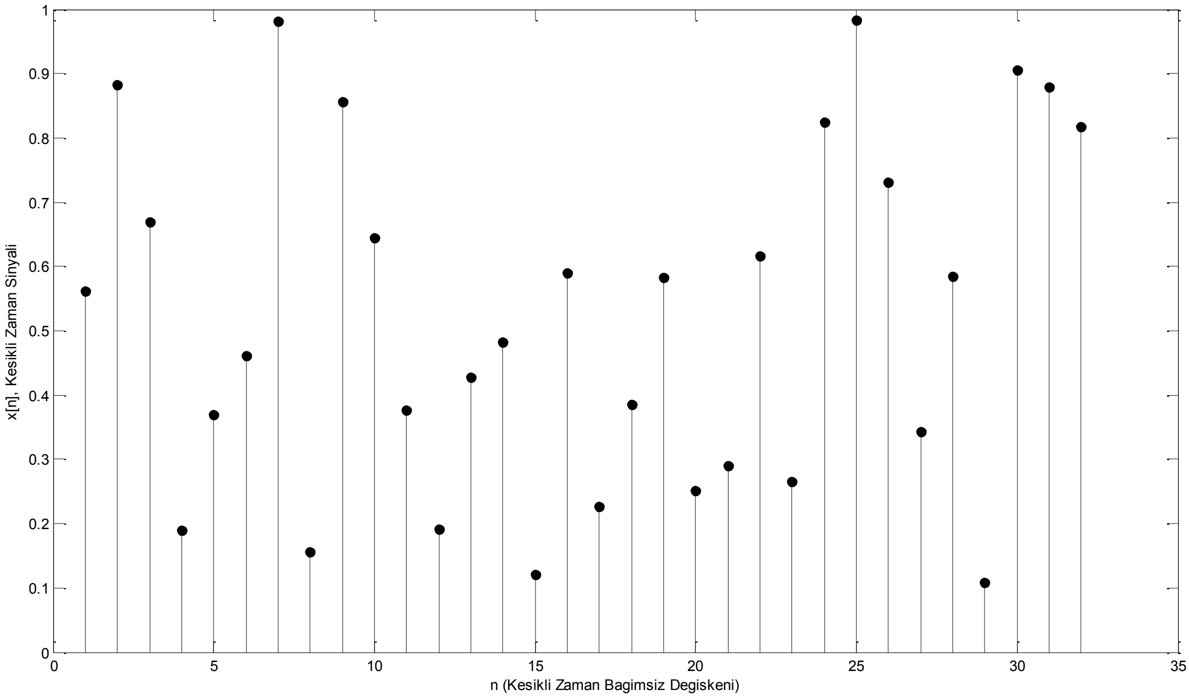
Dikkat ederseniz notasyondaki her bir sembol ya da işaret bir anlam ifade etmektedir.



Şekil 1.1 $x(t)$ örnek sürekli zaman sinyali

Benzer şekilde aynı $x(t)$ sinyalinin kesikli zaman (discrete-time) gösterimini ne şekilde ifade edebiliriz, ya da etmeliyiz? $x(n)$ birçok öğrencinin ilk düştüğü hatadır. Sinyal aynı ise x ile gösterilmesi gerektiği doğrudur. Ancak bağımsız değişkeni t yerine n ile göstermek sürekli zaman sinyalini nasıl kesikli hale getirir? Bağımsız değişkenin n ile ifade edilmesi, sadece bağımsız değişkenin sürekli zaman değişkeni t yerine n ile gösterileceğini ifade etmektedir. Oysa adı geçen sinyali kesikli zaman sinyali yapan notasyon $x[n], n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots; n \in Z$ gösterimidir. Sinyal x ile gösterilmekte, n (i, j, t ya da k olabilirdi, ancak olmadı!) bağımsız değişkenin kesikli zaman değişkeni olduğunu göstermekte, köşeli parantezler ise sinyalin kesikli zaman sinyali olduğunu ifade etmektedir. Yeniden vurgulamak gerekir ki hiçbir harf, sembol ve işaret israf edilmemiştir. Her biri bir anlam ve bir görev üstlenmiştir. Peki, bağımsız zaman değişkeni n kesikli olmakla birlikte, sinyalin aldığı değer $x[n]$ acaba kesikli midir? Bu kitap boyunca kesikli zaman sinyallerinin aldıkları değerler sürekli olacaktır. Örneğin $x[n]$ sinyalinin $n = n_0\ anındaki\ değeri\ x[n] = x[n_0] = \pi$ değerini alabilir. Sinyal zamanda kesikli olmasına rağmen genlik değeri sürekli (irrasyonel dâhil) hatta karmaşık (complex) bir sayı değeri alabilir. Bu nedenle $x[n]$ sinyallerini zamanda kesikli ancak genlik değerinde sürekli olmak üzere kısaca kesikli zaman sinyalleri (discrete time signals) olarak adlandırmaktayız. Kısa bir düşünce geliştirme ile $x[n]$ sinyalinin sadece yatay değil, düşey eksende (genlik ekseninde) de kesikli değerler $x[n] = -511, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, 512\ \ n, x[n] \in Z$ alabileceğini düşünebiliriz. Bu sinyaller literatürde sayısal (digital) sinyaller olarak adlandırılmaktadır. Kesikli zaman (discrete time) sinyallerden sayısal (digital) sinyallere geçiş (genlik ekseninin sürekli değerlerden kesikli değerlere çevrilmesi) nicemleme (quantization) işleminin konusu olup, sürekli genlik değerlerine nicelik verilmesi bu bölüm içerisinde irdelenmeyecektir.

Son olarak kesikli zaman sinyalleri zamanda ayrık olduklarından “ayrık zamanlı sinyaller” olarak da adlandırılabilirler. Bu kitap boyunca her daim kesikli zaman sinyalleri olarak adlandırılacaklardır.



Şekil 1.2 $x[n]$ örnek kesikli zaman sinyali.

Şekil 1.2'de x kesikli zaman sinyali gösterilmektedir. $x(t)$ sinyalinden $x[n]$ sinyaline, ya da $x[n]$ sinyalinden $x(t)$ sinyaline nasıl geçildiği ya da geçilebileceği sorusunu kendine soran arkadaşlara teşekkür ediyorum. Yeni yürümeyi öğrenen çocukların koşmaya çalışmasına benzeyen bu merakı gidermenin en iyi yolu "Bir anda bir adım" sözünü hatırlatmaktır. Bu geçiş; örnekleme teoreminin bir konusu olup, ilgili teorem ilk önce sürekli zaman sinyalinden kesikli zaman sinyaline ve daha sonra nicemle ile kesikli zaman sinyalinden sayısal (digital) sinyale geçerek analog sinyalden sayısal sinyale dönüşümü içeren birçok pratik uygulama barındırmaktadır.

1.2 Periyodik Sinyaller

Bu kitap boyunca en çok karşılaşacağımız sinyal türlerinden bir tanesi periyodik sinyallerdir. Periyodik sinyaller deyince, belli bir T periyodunda kendini tekrar eden sinyallerden bahsetmekteyiz. Ancak bu tanım herkesin kafasında farklı bir ifadeye neden olacağından geleneksel dilimiz olan matematiğe başvurmakta fayda vardır.

$$x(t) = x(t + T) \tag{1.1}$$

Eşitlik 1.1'de verildiği üzere herhangi bir t anındaki x sinyalinin değeri, T herhangi bir sabit süre sonra fonksiyonda yerine konulduğunda aynı değeri veriyorsa bu sinyale periyodik sinyal denir. Dikkat edilmesi gereken bir husus, sinyalin belli bir $T, T \in R$ süre (dönem) sonra $x(t)$ sinyali ile tıpatıp aynı değeri vermesi gerektiğidir. Yakın ya da benzer bir değer, $x(t)$ sinyalini periyodik değil, hemen hemen periyodik (almost periodic ya da quasi periodic) yapar. Bu durumla ilgili bir örnek kesikli zamanda verilecektir.

En kolay örnek verilebilecek sürekli zaman periyodik sinyaller; üstel ve sinüsoidal sinyallerdir. Bu sinyallere en iyi örnek ise $x(t) = e^{j\Omega_0 t}$ sinyalidir[1]. O halde üstel $x(t) = e^{j\Omega_0 t}$ sinyalinin periyodik olduğunu ispatlayalım. Sinyalin periyodik olduğunu ispatlayacağımız göz önüne alındığında Eşitlik 1.1'den yola çıkmak uygun olacaktır.

$$e^{j\Omega_0 t} = e^{j\Omega_0 (t+T)} = e^{j\Omega_0 t}\, e^{j\Omega_0 T} \qquad (1.2)$$

Eşitlik 1.1 kullanılarak elde edilen Eşitlik 1.2'nin sağlanması için $e^{j\Omega_0 T} = 1$ olması beklenmektedir. Eşitlik 1.3'teki Euler açılımının 1 değerine eşit olması için ise,

$$e^{j\Omega_0 T} = cos\,(\Omega_0 T) + jsin(\Omega_0 T) \qquad (1.3)$$

$T = \frac{2\pi}{|\Omega_0|}$ sağlamalıdır. Buradan da açıkça görüldüğü üzere $e^{j\Omega_0 t}$ periyodik bir sinyal olduğu gibi $e^{-j\Omega_0 t}$ ile aynı T_0 "temel" periyoduna sahiptir. Bu noktada "temel (fundamental) periyot" ifadesini incelemekte fayda vardır ve Eşitlik 1.4'de görüldüğü üzere

$$T = \frac{2\pi}{|\Omega_0|} k \qquad (1.4)$$

katlarının da $e^{j\Omega_0 t}$ sinyalini periyodik yapacağı unutulmamalıdır. Ancak bu periyotlar temel periyot değil, temel periyodun tam (k) katlarıdır.

Bir resim bin kelimeye bedeldir. Bu durumda ilgi alanımıza giren $x(t)$ sinyalinin grafiğini çizmeliyiz. Şekil 1.3'e bakmadan önce $x(t) = e^{j\Omega_0 t}$ sürekli zaman sinyalini bir kareli kağıda ya da MATLAB ortamında bilgisayar ekranınıza çizdirmeyi denemelisiniz. Unutmayınız, uygulamadığınız hiçbir bilgi Size ait değildir.

Umarım $x(t) = e^{j\Omega_0 t}$ sinyalini çizmeyi başaramadınız. Çünkü ben de başaramadım! Nedeni ise çok basit: t bağımsız değişkeni yatay eksende iken $x(t)$ sinyalinin hem gerçel hem de sanal bileşeni vardır. Dolayısıyla kartezyen koordinatlarda $x(t)$ sinyalinin

a) Gerçel bileşenini
b) Sanal bileşenini

belirterek veya kutupsal (polar) koordinat sisteminde ise

a) Genliğini
b) Fazını

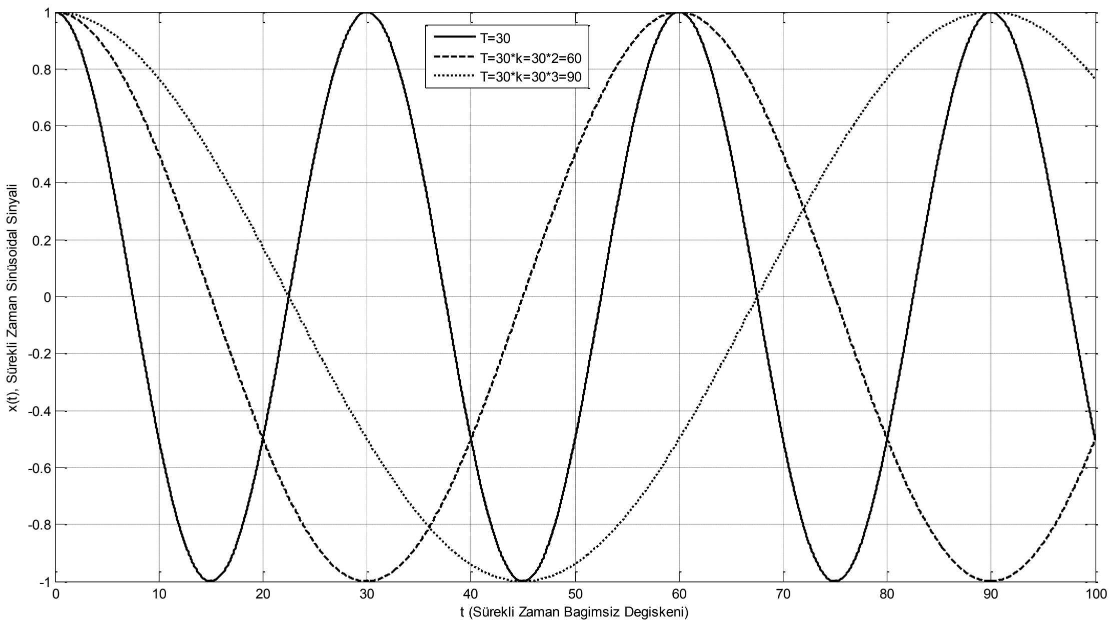
ifade ederek çizmeniz gerekir.

Bu kısmı anlamayanların karmaşık fonksiyonlar teorisini tekrar etmeleri gerekir. Ancak basit düşünceden hareket ile karmaşık bir fonksiyonun gerçel ve sanal (ya da genlik ve faz) olmak üzere iki kısmı (bölümü) var ise tek bir eksen üzerinde iki bilgiyi birden sunmamız mümkün değildir.

Şekil 1.3'te $x(t) = e^{j\Omega_0 t}$ sinyalinin reel (gerçel) kısmı olan $cos(\Omega_0 t)$ sinyali, $T = 30$ için çizilmiştir $\left(\Omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}\right)$.

---

[1] Elektrik ve elektronik mühendisliğinde akım ile karışmaması için $i = \sqrt{-1}$ yerine j sembolü yaygın olarak kullanılmaktadır.



Şekil 1.3 $cos(\Omega_0 t)$ sürekli zaman periyodik sinyalinin bağımsız değişken t'ye göre grafiği.

Şekil 1.3'ten temel periyod $T = 30$ ve bu periyodun $k = 2$ ve $k = 3$ katlarının da periyodik olduğu açıkça görülmektedir.

Karmaşık üstel sürekli zaman periyodik sinyallerin (Bu zincirleme isim tamlaması, umarım Size de bana olduğu kadar anlam ifade ediyordur) analizi ve bu sinyallerin özel bir hali olan sinüsoidal sinyalin analizinin, periyodik sinyallerin analizini bitireceğini, tamamlayacağını düşünüyorsanız çok yanılıyorsunuz. Daha kovada çok balık var ve dipte kalanlar; görmesi, anlaması zor çamurlu sularda yüzüyorlar!

Kesikli zaman periyodik sinyallerin, periyodik sinyaller içinde çok özel bir yeri vardır. Neden?

Eşitlik 1.1'de verilen incelemeyi Eşitlik 1.5 ile

$$x[n] = x[n + N] \tag{1.5}$$

$x[n] = e^{j\omega_0 n}$ kesikli zaman sinyali için yapalım:

$$e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 (n+N)} = e^{j\omega_0 n}\, e^{j\omega_0 N} \tag{1.6}$$

Eşitlik 1.5 kullanılarak Eşitlik 1.6'yı elde ettikten sonra bir miktar duralım. Şeytan her zaman ayrıntıda gizlidir. Sürekli zaman sinyallerinde bağımsız değişken için t yerine n kullandığımız gibi, temel frekans için de Ω_0 yerine ω_0 kullandığımızı lütfen fark edin. Kitap boyunca *kesikli zaman sinyallerinin* frekans ya da frekans bölgesi gösterimlerinde ω değişkeni (Oppenheim,1999) kullanılacaktır[2].

[2] Bu ω değişkeninin kesikli olduğu anlamına gelmez, ω frekansının kaynaklandığı zaman sinyalinin kesikli olduğu anlamına gelir. Bazı kitaplarda bu notasyon kullanılmamış, sürekli zaman ve kesikli zaman sinyallerinin frekans bölgesi gösterimleri için aynı sembol kullanılmış (örneğin Oppenheim, 1996) olabilir; ancak ayırt ediciliği sağlayabilmek açısından son derece faydalı bir alışkanlık olup, bu kitap boyunca sistematik bir biçimde Ω (sürekli zaman sinyalinin frekans gösterimi), ω ise (kesikli zaman sinyalinin frekans gösterimi) ayırımı yapılacaktır.

Eşitlik 1.6'nın sağlanması için $e^{j\omega_0 N} = 1$ olması beklenmektedir. Eşitlik 1.3'teki Euler açılımının kesikli halinin 1 değerine eşit olması için ise Eşitlik 1.7,

$$\omega_0 N = 2\pi k \tag{1.7}$$

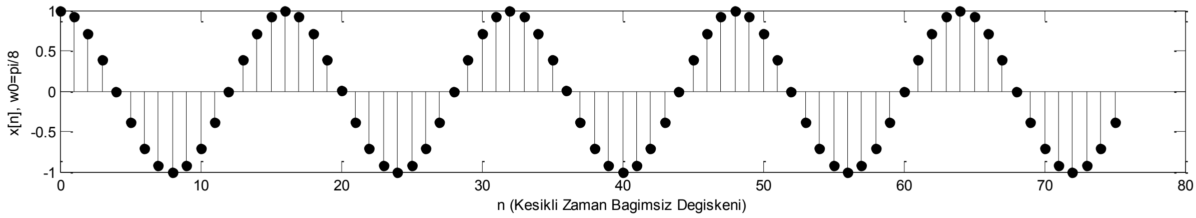
ve Eşitlik 1.7 kullanılarak Eşitlik 1.8

$$N = {}^{2\pi k}/_{\omega_0} = \left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right)k \tag{1.8}$$

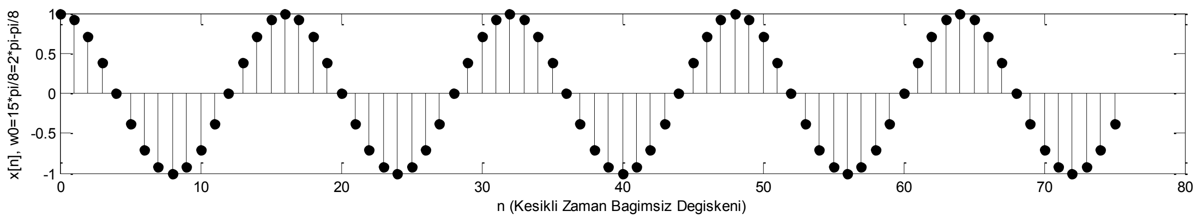
karşılamalıdır. İlk anda aklınıza gelen soru "Eşitlik 1.8'in Eşitlik 1.4'ten ne farkı var ki?" şeklinde olabilir.

Tek farkı var: N tam sayı olmak zorunda! (T için böyle bir zorunluluk yoktu.) Bu durumda ω_0'ın π içermediği tüm durumlar için $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ periyodik değildir, çünkü $x[n] = x[n+N]$ eşitliği sağlanmaz[3]. Garip ama gerçek!

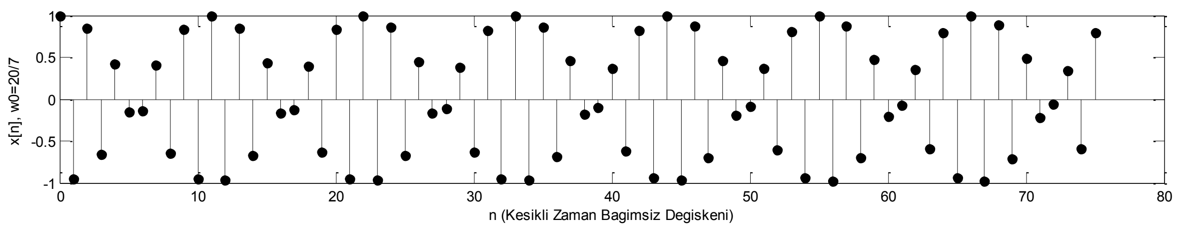
Teoriyi uygulama ile pekiştirelim. Önceden olduğu gibi Şekil 1.4'e bakmadan; $cos\left(\frac{\pi n}{8}\right)$, $cos\left(\frac{15\pi n}{8}\right)$ ve $cos\left(\frac{20n}{7}\right)$ sinyalleri için, $x[n]$ kesikli zaman sinyalinin n bağımsız değişkenine göre grafiğini çiziniz. Grafik üzerinden hangi sinyalin periyodik, hangisinin periyodik olmadığını belirleyiniz, daha sonra Eşitlik 1.8'i kullanarak yanılıp yanılmadığınızı belirleyiniz.



a.



b.



c.

Şekil 1.4 a. $cos\left(\frac{\pi n}{8}\right)$ sinyali, b. $cos\left(\frac{\pi n}{8}\right)$ sinyali ile aynı karakteristiği gösteren $cos\left(\frac{15\pi n}{8}\right)$ ve c. **Sinyalde $\boldsymbol{\omega_0}$'ın $\boldsymbol{\pi}$ içermediği durumda periyodikliğin bozulmasına örnek olan $cos\left(\frac{\mathbf{20n}}{\mathbf{7}}\right)$ sinyali.**

[3] $\omega_0 = 0$ hariç. Bu durumda $x[n]$ sinyali üstel bir fonksiyon değildir ve temel periyot tanımsızdır.

Şekil 1.4'ü doğrulayacak nitelikte, kesikli zaman gerçel sinüsoidal periyodik sinyalinin herhangi bir ω_0 açısal frekansındaki ifadesinin, bu açısal frekansa 2π ve katlarında açısal frekans eklendiğinde elde edilen ifadeyle aynı olup olmayacağını inceleyelim.

$$\begin{aligned} x[n] &= cos(\omega_0 n) \\ &= cos[(\omega_0 + 2\pi r)n] \\ &= cos(\omega_0 n + 2\pi rn) \\ &= cos(\omega_0 n)cos(2\pi rn) - sin(\omega_0 n)sin(2\pi rn); n, r\epsilon Z \\ &= cos(\omega_0 n) = x[n] \end{aligned} \tag{1.9}$$

Sonuç olarak, $x[n] = cos(\omega_0 n)$ formundaki kesikli zaman gerçel sinüsoidal sinyalinde, sadece 2π radyan uzunluğundaki frekans aralığı incelendiğinde, tüm sinyalin davranışı hakkında bilgi sahibi olunabilmektedir. 2π radyan uzunluğundaki frekans aralığından söz edilirken Eşitlik 1.10'daki

$$-\pi < \omega_0 < \pi \tag{1.10}$$

veya Eşitlik 1.11'deki

$$0 < \omega_0 < 2\pi \tag{1.11}$$

gibi aralıklar anlaşılabilmektedir. Bu sayede, kesikli zaman gerçel sinüsoidal sinyalinin herhangi bir ω_0 frekansında gösterdiği davranış ile bu ω_0 frekansını 2π radyana tamamlayan, $(2\pi - \omega_0)$ radyan frekansında gösterdiği davranış aynı özellikleri taşıyacaktır. Nitekim Şekil 1.4.a'daki ile Şekil 1.4.b'deki sinyallerin, birbirlerinin aynı karakteristiğe sahip sinyaller olması hiç de şaşırtıcı değildir.

Öte yandan, ilgili kesikli zaman gerçel sinüsoidal $x[n]$ sinyalinin N periyodu Eşitlik 1.12'deki gibi

$$N = \frac{2\pi k}{\omega_0}; k \in Z, N \in Z^+ \tag{1.12}$$

olarak bulunmuştu. k katsayısı tamsayı ve N periyodu pozitif tamsayı olmak zorunda olduğu için, ω_0 açısal frekansının değeri de π radyan ve katları olmak zorundadır. Bu nedenledir ki Şekil 1.4'teki üçüncü ve son sinyalde $\omega_0 = 20/7$ radyan için elde edilen sinyal, periyodik olmayan bir sinyaldir.

Sinyalin periyodik gibi görünmesi Sizi yanıltmamalıdır. Eşitlik 1.8'de benzer ya da yakın (≅) gibi ifadeler bulunmamaktadır. Sinyalin periyodik olabilmesi için $x[n] = x[n + N]$ sağlanmalıdır. Nitekim $cos\left(\frac{20n}{7}\right)$ sinyalinin hiçbir değeri bir birine eşit değildir. Bu durum açısal frekansında pi içermeyen tüm kesikli kosinüsler için geçerlidir.

"If you can't explain it simply, you don't understand it well enough" Albert Einstein

Basitçe açıklayamıyorsan, yeterince iyi anlamamışşın demektir.

1.3 Kullanışlı Sinyaller

Öncelikle hemen belirtmeliyim ki kullanışlı sinyal tanımı geleneksel ya da standart bir tanım değildir. Bu bölüm altında anlatılacak sinyaller; sinyal işleme ve sistem analizi bağlamında o kadar çok işimize yarayacaktır ki bu nedenle en uygun ifade olarak "kullanışlı" kelimesi seçilmiştir. Bu sinyaller öncelikle kesikli zamanda girizgâh olarak sunulacak, ancak bu sinyallerin temel kavrayışını, anlayışını ve kuramsal temellerini sürekli zaman bölgesinin irdelenmesi sağlayacaktır. Yine zamana yayılmış tecrübe göstermektedir ki, bu sinyalleri sürekli zamanda kavramak, kesikli zamanda anlamanın çok ötesindedir. Bu nedenle lütfen dikkatli okuyunuz, satır aralarını atlamayınız ve kaçırmayınız.

1.3.1 Birim dürtü ve birim basamak fonksiyonları

Bu kitabı okurken bir takım yazma alışkanlıklarını da kazanmanız hedeflenmiştir. Bir ödev hazırlarken ya da iş başvurusunda bir sunum vermeniz istendiğinde herhangi bir başlık altında bir açıklama yapmadan bir alt başlığa geçmeniz uygun değildir. Ne yazacağınızı bilmiyorsanız genel bir giriş yapınız. Isınma (ice breaker) kaynaşmanın başlangıcıdır.

1.3.1.1 Kesikli zamanda birim dürtü ve birim basamak dizileri

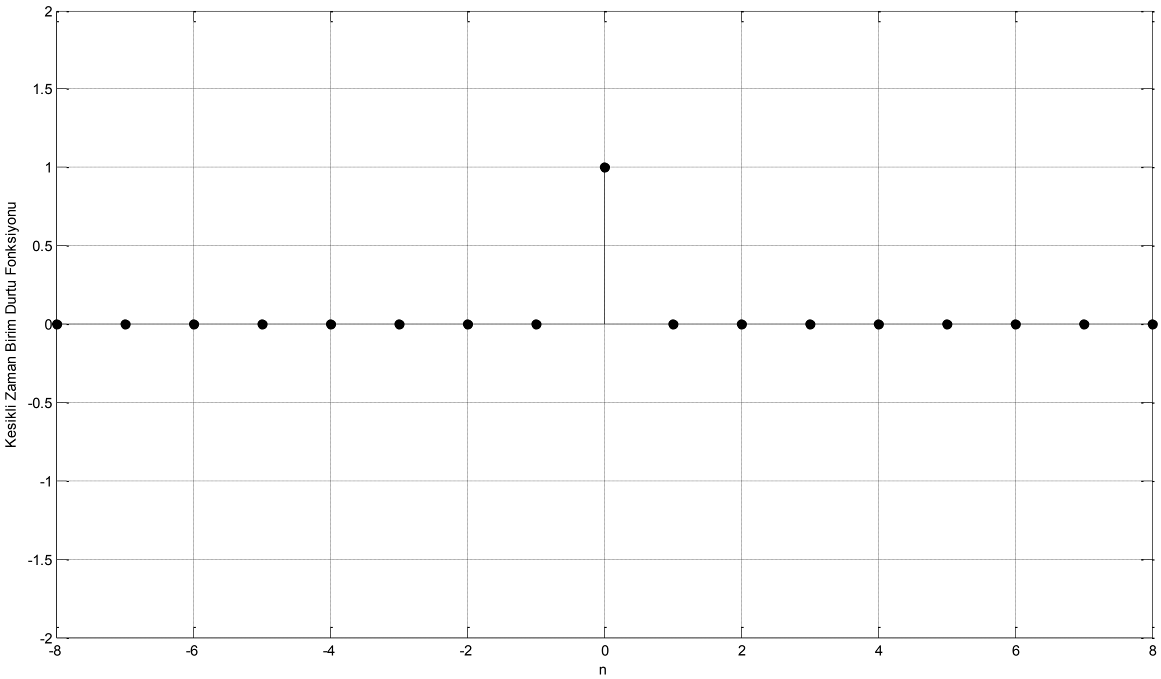
Bakalım dikkatli bir okuyucu musunuz? Genel başlığın altı ile bu özel başlık tıpa tıp aynı mı?

Fonksiyon kelimesinin yerini dizi ifadesinin aldığına dikkat ettiniz mi?

En temel ve en basit kesikli zaman dizisi birim dürtü (unit impulse) sinyalidir. Tanımı son derece basittir.

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

Eşitlik 1.13'teki tanımdan yola çıkarak birim dürtü dizisini çok kolay anlayabiliriz. $n = 0$ anında değeri 1 olan, diğer tüm kesikli zamanlarda değeri 0 olan sinyale birim dürtü dizisi diyebiliriz. Kavramayı pekiştirmek amacıyla mutlaka bir çizim gerekir.



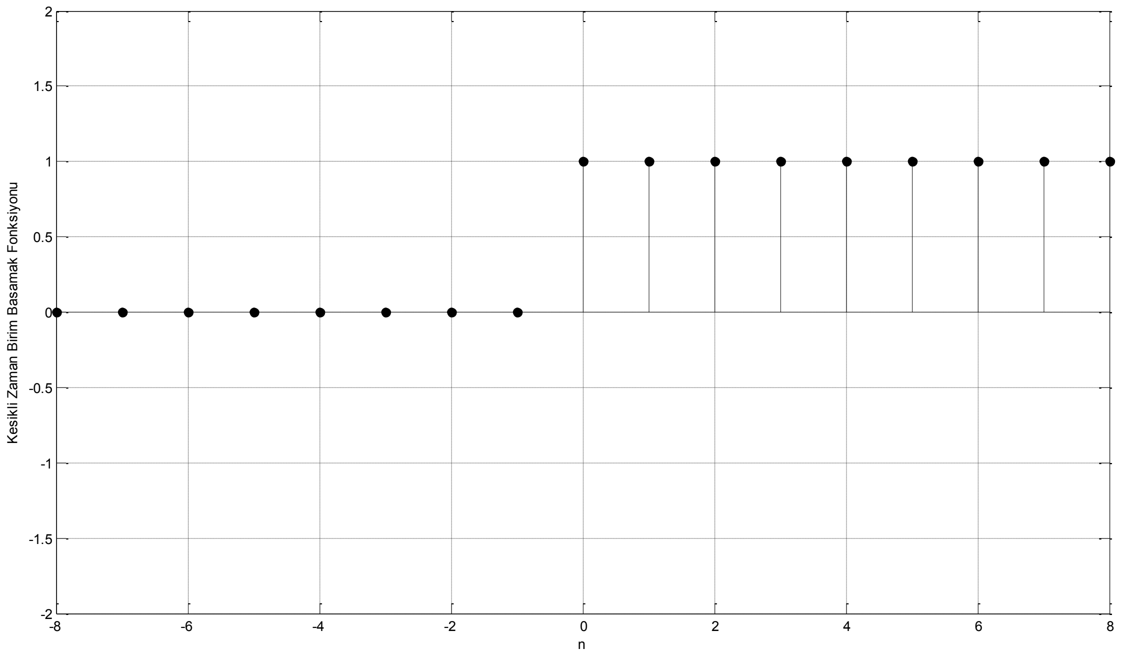
Şekil 1.5 Kesikli zaman birim dürtü dizisi.

Şekil 1.5'teki gibi bu kadar basit bir sinyali, bu kadar "kullanışlı" yapan acaba nedir? Dikkat ederseniz zaman eksenini kaydırırsak sadece zamanın o "anında" değeri olan, diğer anlarda değeri 0 olan bir dizi elde etmiş oluruz. Bu nedenle akıp giden zaman içinde, zamanın sadece o anını incelemek için benzersiz bir fonksiyona sahip olmuş oluruz. Diğer bir deyişle, herhangi bir diziyi birim dürtü dizisi cinsinden ifade etmek mümkündür. Hem derinliğimizi arttıralım, hem de bir örnek yapalım.

Kesikli zaman birim basamak dizisi adından da anlaşılacağı üzere öncesi 0, sonrası 1 olan bir basamak fonksiyonudur.

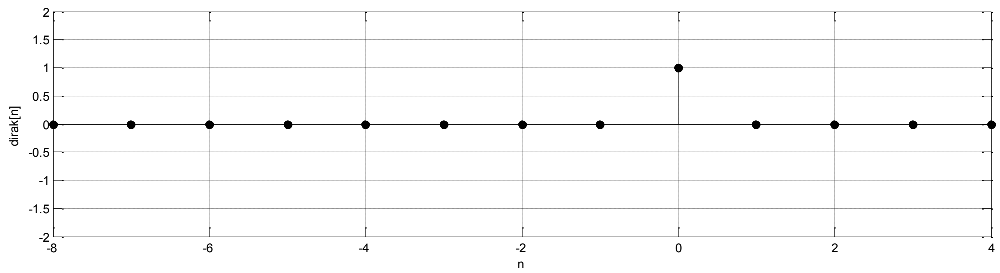
$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases} \tag{1.14}$$

Kesikli zamanda güvendeyiz, ancak sürekli zamanda böyle bir dizinin fonksiyon haline gelmesi ile tam olarak $t = 0$ noktasında bir süreksizlik içereceği aşikârdır. Şimdi acele etmeden Eşitlik 1.14'te $u[n]$ ile gösterdiğimiz kesikli zaman birim basamak dizisini (discrete-time unit step sequence) biraz irdeleyelim. Önce bir resim bin kelimeye bedeldir. Şekil 1.6'yı incelemeden kesikli zaman birim basamak dizisini tüm eksen bilgilerini vererek kendiniz çizmeye çalışın.

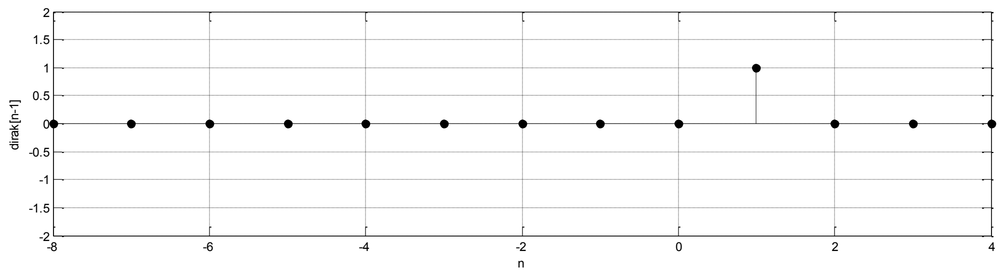


Şekil 1.6 Kesikli zaman birim basamak dizisi.

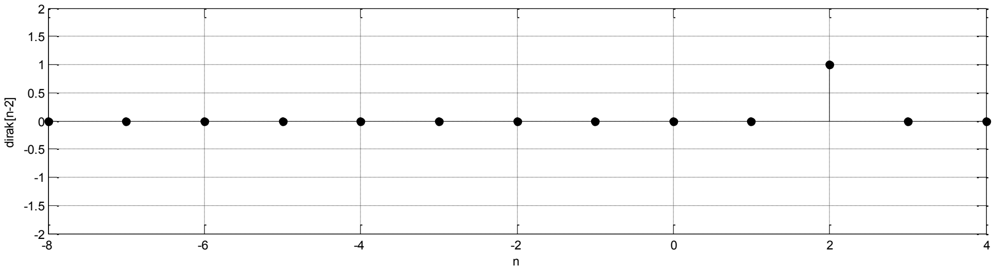
Şekil 1.6'yı incelediğinizde birim basamak dizisi ile birim dürtü dizisi arasında sıkı bir ilişki olduğu gözünüzden kaçmamıştır: Eğer birim dürtü sinyali ile birim dürtü sinyalinin sıfırdan büyük sağa kaymış tüm hallerini toplarsak birim basamak sinyalini elde etmiş oluruz. Elbette ki Şekil 1.7'deki gibi sonsuz bir toplamdan bahsediyoruz.



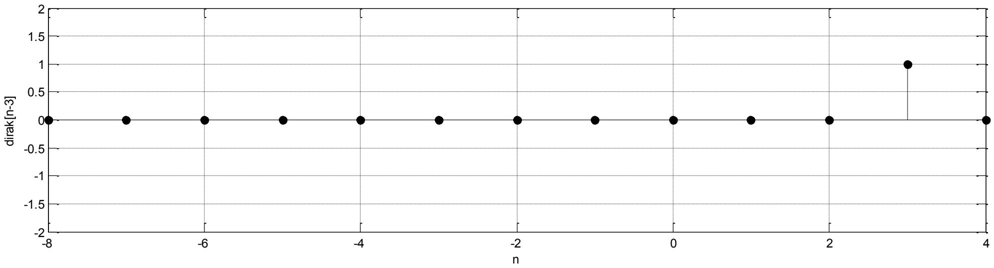
a.



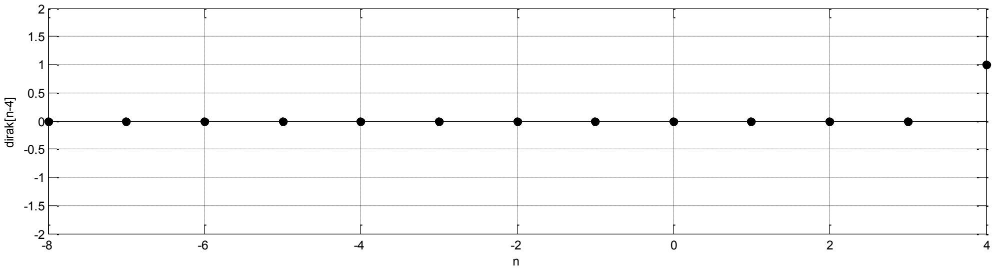
b.



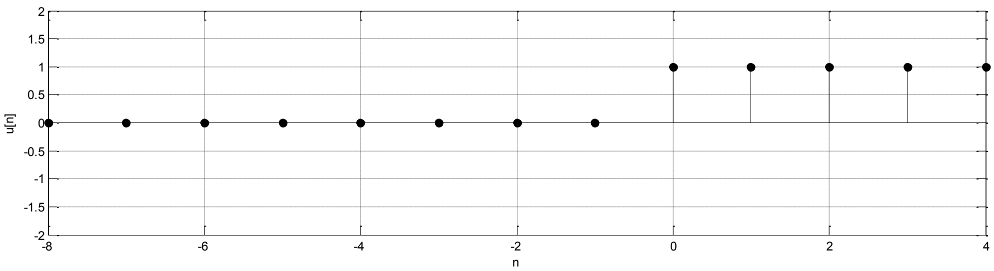
c.



d.



e.



f.

Şekil 1.7 Kesikli zaman birim basamak dizisinin kesikli zaman birim dürtü sinyalinden elde edilmesi: a. $\delta[n]$, b. $\delta[n-1]$, c. $\delta[n-2]$, d. $\delta[n-3]$, e. $\delta[n-4]$ ve f. $u[n]$.

Bir denklem ise bin resme bedeldir, hatta burada Eşitlik 1.15 ancak sonsuz resim ile ifade edilebilir.

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \cdots \qquad (1.15)$$

Eşitlik 1.15'i çok iyi kavramımız gerekir. Açıkçası anlamadığımız tüm toplam ifadelerini sakin bir biçimde açmamız, genişletmemiz gerekir. Bu kadar açıklama, görsel grafik ve denklemden sonra bu artık mümkündür. Şimdi biraz matematik dehamızı kullanalım. Çok uzun süredir değişken dönüştürme başlığı altında anlatılan matematiksel kavramı işe koşalım. Eşitlik 1.15'teki $[n-k]$ ifadesi yerine m değişkenini kullanırsak $(n-k=m)$ ve $k=0$ iken alt indisin m değişkeni üzerinden n değişkeniyle,

$k = \infty$ iken ise üst indisin m değişkeni üzerinden $-\infty$ değişkeniyle değiştiğini hesaba kattığımızda Eşitlik 1.16'yı elde etmiş oluruz[4].

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m] \tag{1.16}$$

Eşitlik 1.16'nın muazzam fiziksel manaları vardır: Görsel olarak m için eksi sonsuzdan gelip $n = 0$ anına kadar 0 değerini alan, $n = 0$ anından sonra ise 1 değerini alan ve bu değerde kalan bir fonksiyona işaret etmektedir. Nitekim Eşitlik 1.16'daki toplam, $n < 0$ için 0, $n \geq 0$ için 1 değerini vermektedir. Peki, bu durumda rasgele bir $x[n]$ dizisini birim dürtü dizisi cinsinden nasıl ifade edebiliriz? Eşitlik 1.15'ten ilham alarak:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \tag{1.17}$$

Eşitlik 1.17'nin sinyal işlemede çok özel bir yeri vardır. Bu eşitliğe "elek özelliği" (sifting, NOT shifting, although it shifts) denir. Bunun nedeni birim dürtü fonksiyonunun $[n-k]$ anındaki değerini herhangi bir dizinin değeri ile betimleyerek aslında o diziyi bir fonksiyon olarak ifade etmesidir. Şekil 1.7'de açıkça görüldüğü üzere birim dürtü fonksiyonu aslında herhangi bir diziyi eleye eleye ifade edebilir. Eşitlik 1.17, hak ettiği saygınlığı çok kısa sürede bulacaktır.

Örnek:

Aramızdan bazılarının $\delta[n-1]$ sinyalinin neden ve nasıl $\delta[n]$ sinyalinin zamanda bir birim kayarak (shift) *n=1* anında değer aldığını ve Şekil 1.7.b halini aldığını merak ettiğini düşünüyorum.

Eşitlik 1.13 ile başlayarak

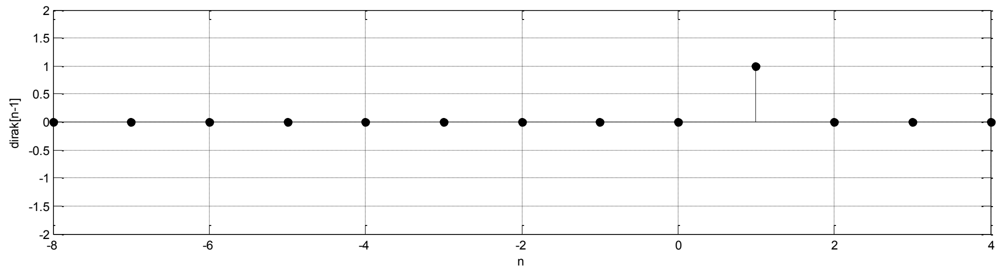
$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

$$m = n-1, \delta[m] = \begin{cases} 0, & m \neq 0 \\ 1, & m = 0 \end{cases}$$

$$\delta[n-1] = \begin{cases} 0, & n \neq 1 \\ 1, & n = 1 \end{cases}$$

olduğunu görebiliriz. Sinyaller için zamanda kayma (shift in time, time shift) son derece önemli bir özellik olup, birim dürtü fonksiyonun $\delta[n-i], n-i=0, \rightarrow n=i,\ i \in Z$ kaç örnek kayacağı kolaylıkla hesap edilebilir.

[4] Toplam ifadelerinde alt indis ile üst indisin yer değiştirmesi sonucu değiştirmemektedir. Sadece toplananların toplanma sırasını değiştirmektedir.



Şekil 1.7.b (tekrar) Kesikli zaman birim dürtü sinyalinin zamanda kayması, $\delta[n-1]$

1.3.1.2 Sürekli zamanda birim dürtü ve birim basamak fonksiyonları

Bu alanda yazılan birçok kitap sürekli zaman birim dürtü fonksiyonunu tanımlamak yerine bu başlık altında birim basamak fonksiyonunu anlatmaya başlar. Yeniden felsefeye geri dönersek; karşınızdaki kişi sorduğunuz soruya cevap vermek yerine başka bir sorunun cevabını veriyor ise bir şeyler doğru gitmiyor demektir. Peki, konunun uzmanları neden birim dürtü ve birim basamak fonksiyonları ile başlayan bir başlık altında sırayı takip etmek yerine önce sürekli zaman birim basamak fonksiyonunu anlatırlar?

Cevabı çok basit: Sürekli zaman birim dürtü fonksiyonunu analitik ifade etmek kolay değildir de ondan. Bu sadece Sizin için zor değildir. Herkes için zordur. **SAKIN** Eşitlik 1.13'ten ilham alarak Eşitlik 1.18'de verilen HATAYA düşmeyin… SAKIN.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases} \tag{1.18}$$

Eşitlik 1.18 neden YANLIŞTIR? Çünkü bu fonksiyon $t = 0$ noktasında 1 değerini almaktadır. Oysa Eşitlik 1.16'dan Eşitlik 1.19'a geçmek hiç zor olmamalı:

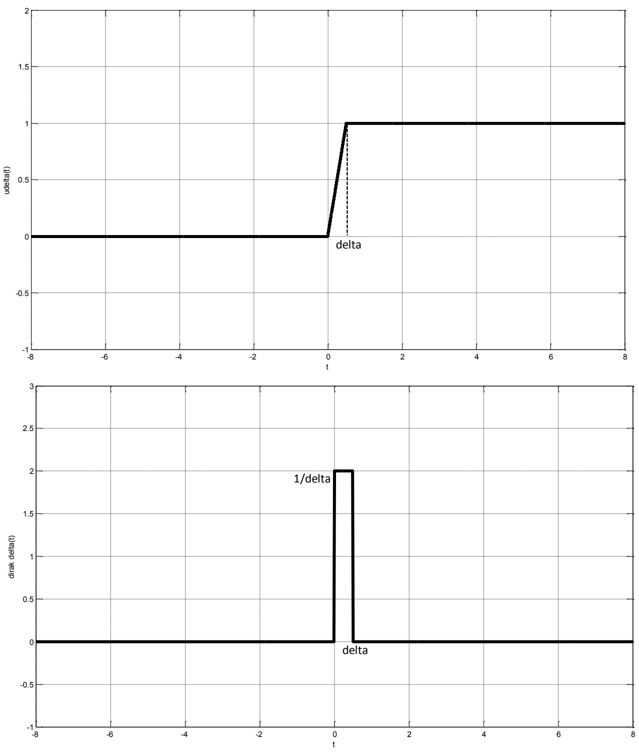
$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\sigma)d\sigma \tag{1.19}$$

Kesikli zamandan sürekli zamana, toplamdan integrale geçiş yaptık. Matematik felsefe ile ne kadar tutarlı… Bu durumda belirsiz integralden yola çıkarak sürekli zaman birim dürtü fonksiyonu, sürekli zaman birim basamak fonksiyonunun birinci türevine eşit çıkacaktır.

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \tag{1.20}$$

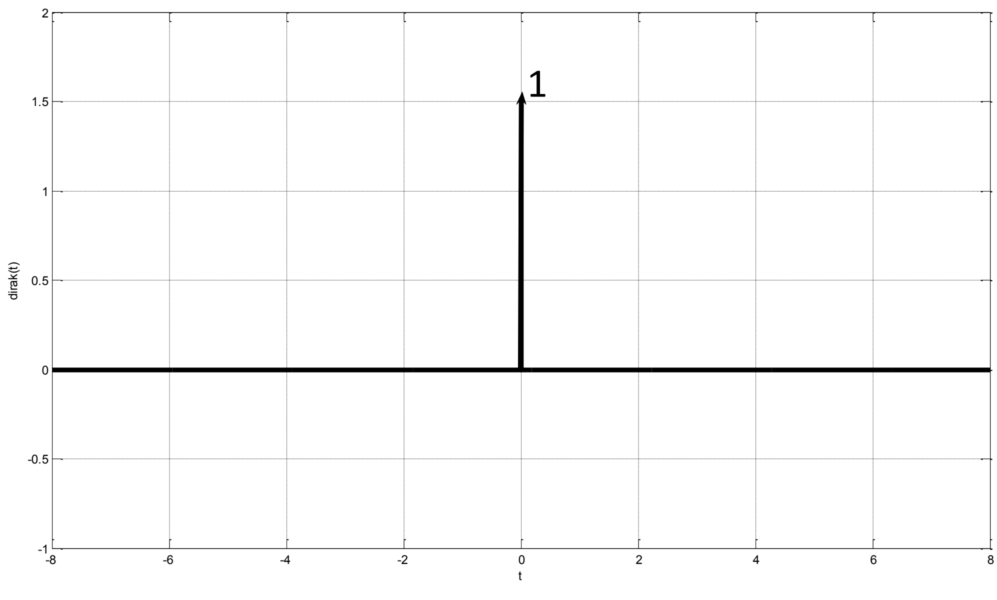
Eşitlik 1.20 herhalde Eşitlik 1.18 ile aynı değildir. Benzer bile değildir. Sürekli zaman birim basamak fonksiyonu $t = 0$ noktasında süreksiz olduğu için türevi alınabilir değildir. Şimdi neden bu kitap hariç birçok kitabın konuyu sondan başa doğru anlattığını biliyoruz. Bilmek ne güzel! Ancak $\delta(t)$ fonksiyonunu anlamamızı sağlamadı. Sadece bu işin kesikli zamanda olduğu kadar kolay olmadığını ortaya koydu.

Peki, bu durumda ne yapmalıyız? Cevap basit: Hiçbir sinyal zaten bir anda hem sıfır değerinde, hem de bir değerinde olamaz. Her şey bir zaman alır. Bu durumda basamağın sıfırdan bir değerini alması da bir zaman alacaktır. Ne kadar zaman? Δ (delta) kadar zaman…



Şekil 1.8 a. Sürekli zaman birim basamak fonksiyonuna yaklaşım, $u_{\Delta}(t)$ ve Şekil 1.8 b. $u_{\Delta}(t)$ fonksiyonunun türevi.

Şimdi matematik biliminin en güzel, en hoşuma giden aracı ile edebiyat sanatının en muhteşem örneklerinden mübalağa (abartma) aracını kullanacağız. Şekil 1.8'in açıkça ortaya koyduğu gibi, madem sürekli zaman birim basamak fonksiyonu Δ kadar sürede birim değerine ulaşıyor. $\lim_{\Delta\to 0} \delta_{\Delta}(t)$ ifadesi ne halini alır? Bu durumdaki gösterim son derece özel olup dikkatle incelemek gerekir. Şekil 1.9'da $\delta(t)$ sürekli zaman birim dürtü fonksiyonu gösterilmektedir. Dikdörtgen darbenin süresi sıfıra inerken genliği $1/\Delta$ sonsuza gitmektedir.



Şekil 1.9 Sürekli zaman birim dürtü fonksiyonu.

Sürekli zaman birim dürtü fonksiyonu hakkında bu kadar çok bilgi sahibi olduğumuza göre tekrar düşünelim: $\delta(t) =$ olarak ne yazabiliriz? Başka bir ifadeyle, $\delta(t)$ fonksiyonunun analitik denklemi nedir? Bazı şeyleri ne kadar iyi anlarsak anlayalım ifade etmek bir o kadar zordur. Kelimeler boğazımızda düğümlenir. İşte bu nedenle $\delta(t)$ sürekli zaman birim dürtü fonksiyonuna her ihtiyacımız olduğunda $\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$ olduğunu ve Şekil 1.9'daki gibi genliğinin ok işaretiyle sonsuza doğru gidip (koordinat eksenlerindeki gösterime benzer olarak) sadece altında kalan alanın 1 olduğunu unutmayalım[5]. Böylece yalnız eşitliği değil, fiziksel anlamını da sürekli aklımızda tutalım.

Sürekli zaman birim dürtü fonksiyonunu bu kadar özel yapan nedir? Eşitlik 1.17'yi hatırlayalım:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Eşitlik 1.17'deki elek özelliği düşünüldüğünde, Eşitlik 1.21 herhangi bir sürekli zaman sinyalini birim dürtü fonksiyonu cinsinden ifade edebilmek açısından son derece önemlidir.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau \tag{1.21}$$

[5] Eşitlik 1.19 dikkatle incelendiğinde bir fonksiyonun belirli sınırlar içinde alınan integralinin, fonksiyonun o sınırlar dahilinde altında kalan alanına eşit olduğu bu noktada hatırlanmalıdır. Zaten bu bağlamda, $\delta(t)$ fonksiyonunun 0 ile sonsuz aralığında altında kalan alanın 1'e eşit olması, $u(t)$ fonksiyonunun 0 ile sonsuz aralığında sabit 1 değerinde olması ile tutarlıdır.