

HAFTA 3: SİNYALLER İÇİN UYGULAMALAR

Sorular ve Cevapları..... 2

Bölüm Sonu Soruları ve Cevapları

Alıştırma 1:

$x(t) = Ae^{\beta t}$; $A = |A|e^{j\alpha}$ ve $\beta = \gamma + j\Omega_0$ sürekli zaman genel kompleks eksponansiyel sinyalinin genlik değişimini çizip, çıkan sonucu yorumlayınız.

Cevap 1:

A katsayısının kutupsal biçimde genlik ve faz olarak, üstel ifadedeki β katsayısının ise kartezyen biçimde gerçel ve sanal kısımlarıyla verilmesi sonucu elde edilen $x(t)$ sürekli zaman genel kompleks eksponansiyel sinyalin genlik değişimini incelemek için, öncelikli olarak Eşitlik 1.a'da görüldüğü üzere, soruda verilen A ve β ifadelerini $x(t)$ sinyalinde yerine koyarak işe başlamalıyız.

$$x(t) = Ae^{\beta t} = (|A|e^{j\alpha})e^{(\gamma+j\Omega_0)t} = (|A|e^{\gamma t})e^{j(\Omega_0 t + \alpha)} \quad (1.a)$$

Eşitlik 1.3'teki Euler açılımından faydalanıldığında $x(t)$ sinyalinin gerçel ve sanal kısımlarını son haliyle Eşitlik 1.b ile elde etmekteyiz.

$$\begin{aligned} x(t) &= (|A|e^{\gamma t})[\cos(\Omega_0 t + \alpha) + j\sin(\Omega_0 t + \alpha)] \\ &= |A|e^{\gamma t} \cos(\Omega_0 t + \alpha) + j|A|e^{\gamma t} \sin(\Omega_0 t + \alpha) \end{aligned} \quad (1.b)$$

Kartezyen koordinatlardaki Eşitlik 1.b'yi kullanarak, grafiğini inceleyeceğimiz $x(t)$ sinyalinin genliğinin matematiksel ifadesini Eşitlik 1.c ile hesaplamak mümkündür.

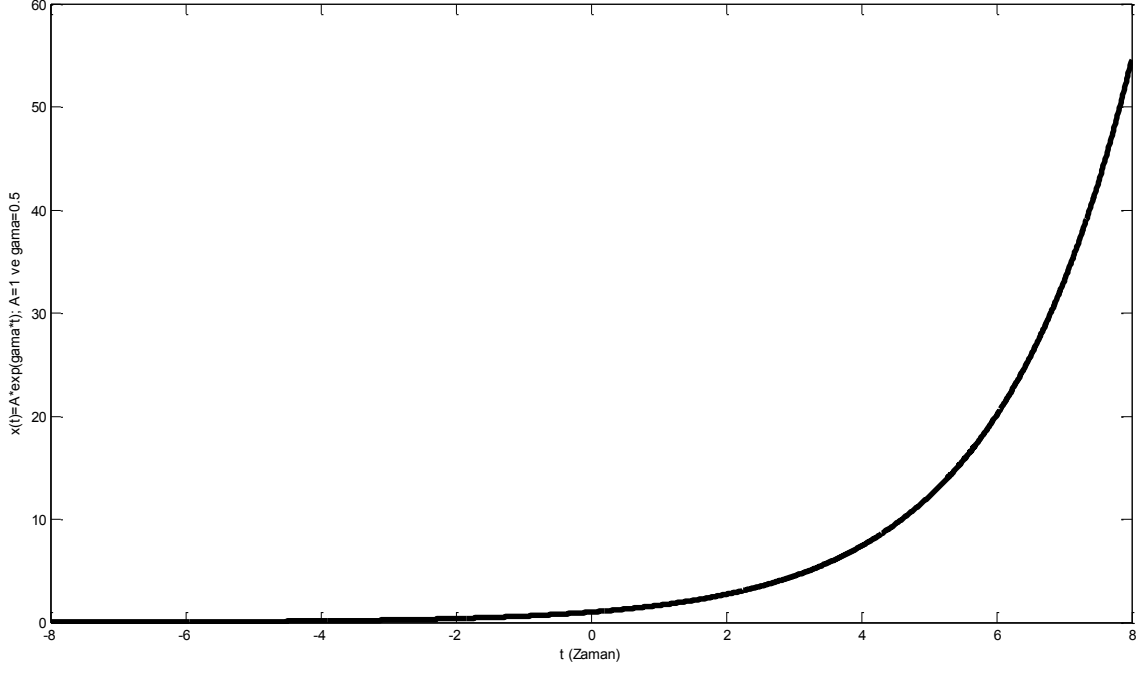
$$\begin{aligned} |x(t)| &= (|A|e^{\gamma t})[\cos^2(\Omega_0 t + \alpha) + \sin^2(\Omega_0 t + \alpha)] \\ &= (|A|e^{\gamma t}) \end{aligned} \quad (1.c)$$

Eşitlik 1.c dikkatle incelendiğinde γ değerinin sıfırdan büyük olduğu durumda $x(t)$ sinyalinin genlik değişiminin eksponansiyel olarak artış eğilimi, γ değerinin sıfırdan küçük olduğu durumda ise ilgili sinyalin genlik değişiminin eksponansiyel olarak azalış (sönümlenme) eğilimi göstermesi beklenmektedir.

γ değerinin sıfırdan büyük olduğu duruma örnek teşkil etmesi açısından Eşitlik 1.c'de $A = 1$ ve $\gamma = 0.5$ olmak üzere Eşitlik 1.d'deki $x(t)$ genlik ifadesi

$$x(t) = e^{0.5t} \quad (1.d)$$

Şekil 1.a'da görülmektedir.

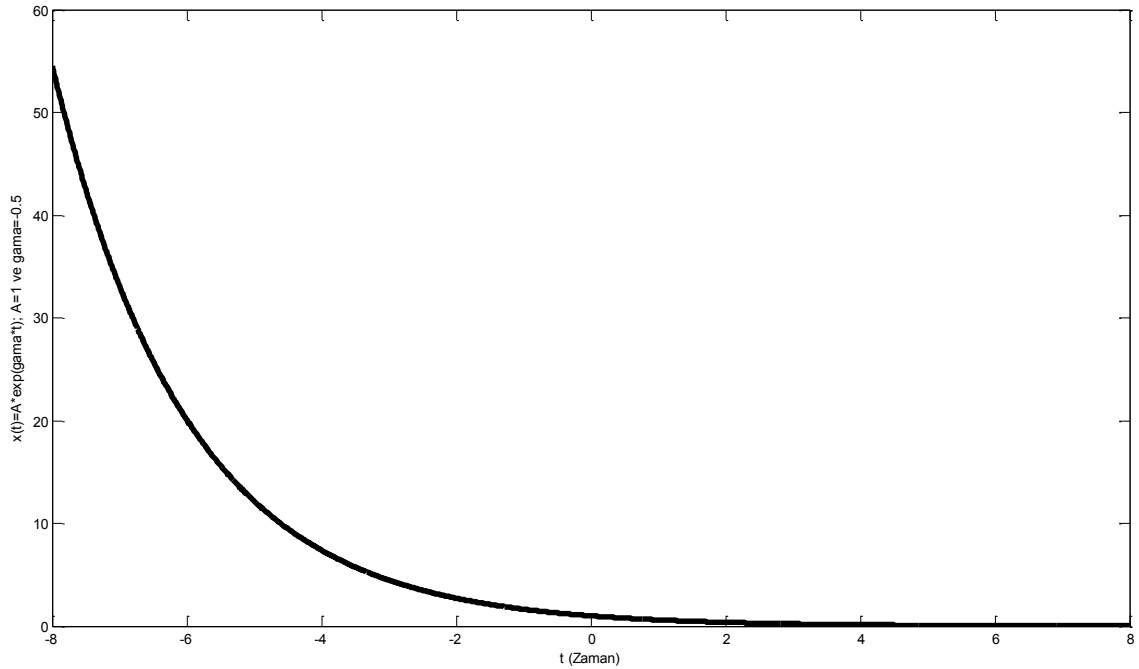


Şekil 1.a $\gamma > 0$ için $x(t)$ sinyalinin genliğinin eksponansiyel olarak artması ($A = 1$ ve $\gamma = 0.5$).

Benzer şekilde γ değerinin sıfırdan küçük olduğu duruma örnek teşkil etmesi açısından Eşitlik 1.c'de $A = 1$ ve $\gamma = -0.5$ olmak üzere Eşitlik 1.e'deki $x(t)$ genlik ifadesi

$$x(t) = e^{-0.5t} \quad (1.e)$$

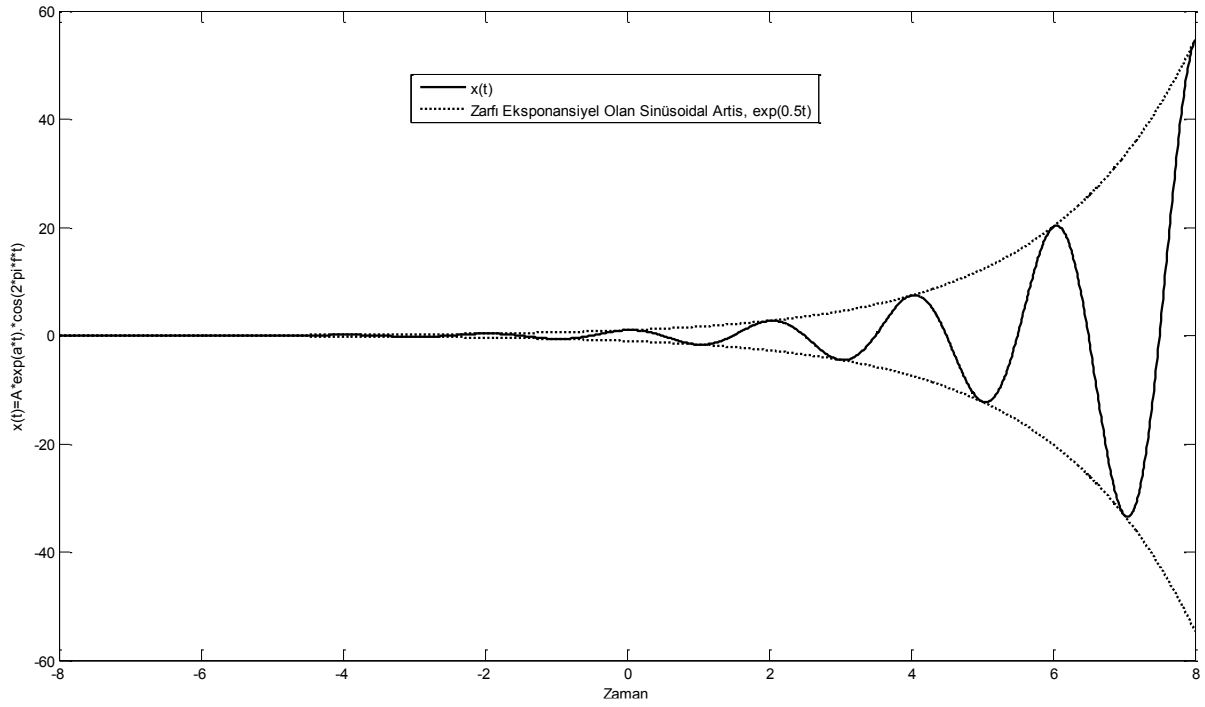
Şekil 1.b'de görüldüğü gibi elde edilmektedir.



Şekil 1.b $\gamma < 0$ için $x(t)$ sinyalinin genliğinin eksponansiyel olarak azalması (sönümlenmesi) ($A = 1$ ve $\gamma = -0.5$).

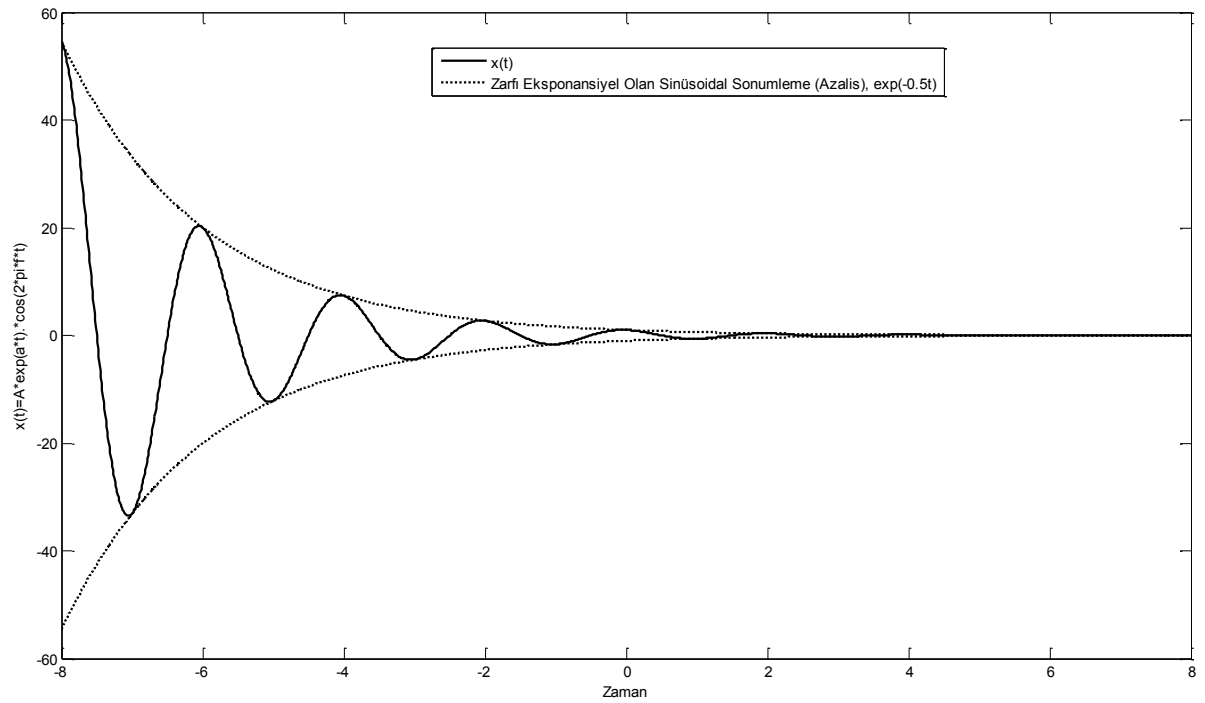
Eşitlik 1.b'deki denklem dikkatle incelendiğinde, çıkan sonucun daha da ilginç yanı, Şekil 1.a ve Şekil 1.b'deki eksponansiyel değişimin, Eşitlik 1.b'deki sinüsoidal sinyallerin (gerçel kısım için kosinüs, sanal kısım için de sinüs) zarfı olduğudur.

Eşitlik 1.b'nin gerçel kısmını ele aldığımızda; Şekil 1.a'daki eksponansiyel artışın, Şekil 1.c'de görüldüğü gibi kosinüs sinyalinin zarfı olması



Şekil 1.c Zarfı eksponansiyel olarak sinüsoidal biçimde artış gösteren $x(t)$ genel kompleks eksponansiyel sinyalinin gerçel genlik değişimi.

ve Şekil 1.b'deki eksponansiyel azalışın, Şekil 1.d'de görüldüğü gibi kosinüs sinyalinin yine zarfı olması



Şekil 1.d Zarfı eksponansiyel olarak sinüsoidal biçimde sönümlenen $x(t)$ genel kompleks eksponansiyel sinyalinin gerçel genlik değişimi.

beklenen bir sonuçtur. Benzer biçimde sanal genlik değişimi de incelenirse, bu durumda eksponansiyel artış ve azalışın, sinüs sinyalinin zarfı olarak elde edileceği aşıkardır.

Alıştırma 2:

$x(t) = e^{(\alpha+j\Omega)t}$ kompleks eksponansiyel sinyalinin kartezyen formda gerçel ve sanal, kutupsal formda ise genlik ve faz değişimi dikkate alınarak, ilgili sinyaldeki t zamanının ve Ω açısal frekansının değişimini üç boyutlu gösterimde inceleyiniz.

Cevap 2:

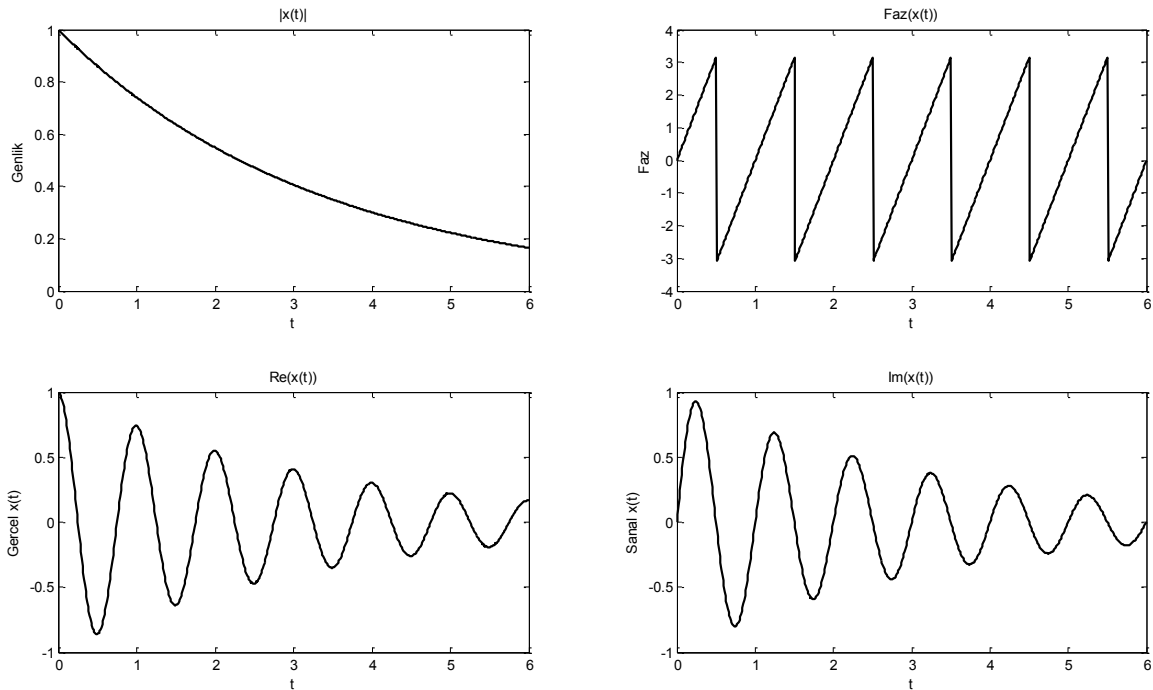
Kompleks eksponansiyel formda verilen $x(t)$ sinyalini Eşitlik 1.f'de görüldüğü gibi gerçel ve kompleks eksponansiyel bileşenlerine ayırdığımızda

$$x(t) = e^{\alpha t} e^{j\Omega t} \quad (1.f)$$

genliğin $e^{\alpha t}$ ile fazın ise (Ωt) ile değiştiğini görebiliriz.

$\alpha = 0$ olması özel koşulunda; genliğin, 0 ile 2π açısal frekans değişimi boyunca 1 değerinde sabit kalmasıyla, kartezyen koordinatlardaki gerçel ve sanal koordinatların birim çember üzerinde değişeceğini ve birim çember üzerindeki salınımın Eşitlik 1.f'deki (Ωt) fazı ile sağlanacağını söyleyebiliriz. Ancak α değeri sıfırdan farklı olduğunda, Ω açısal frekansının ve t zamanının değişiminin, $x(t)$ sinyali üzerinde hangi değişikliklere sebep olacağını incelemek için üç boyutlu $x(t)$ sinyali gösterimi algısal kolaylık sağlayacaktır.

$x(t)$ sürekli zaman kompleks eksponansiyel sinyalinde $\alpha = -0.3$ için, $x(t)$ sinyalinin kartezyen koordinatlarda gösteriminin gerçel ve sanal bölümleri ile kutupsal koordinatlarda gösteriminin genlik ve faz bölümleri, Şekil 1.e'deki gibi elde edilmiştir.

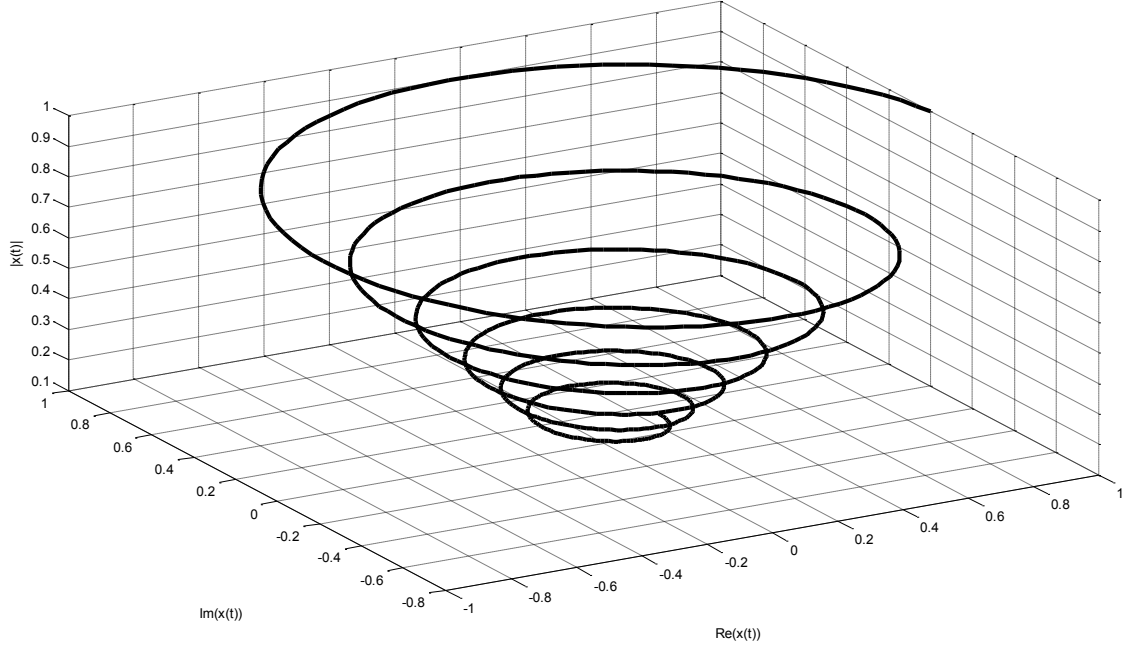


Şekil 1.e $x(t)$ genel kompleks eksponansiyel sinyalin kartezyen koordinatlarda gösteriminin gerçel ve sanal bölümleri ile kutupsal koordinatlarda gösteriminin genlik ve faz bölümleri.

Alıştırma 1'de olduğu gibi, Şekil 1.e'de genlik değişiminin $\alpha < 0$ ile zamana bağlı olarak eksponansiyel sönümlenerek değişmesi şaşırtıcı değildir. Şekil 1.e'de $x(t)$ sinyalinin kartezyen koordinatlarda gerçel

ve sanal kısımları ile kutupsal koordinatlarda genlik ve faz kısımlarını ayrı ayrı elde etmiş olmamıza rağmen, hâlâ tüm bu parametrelerin birbiri ile ilişkisi hakkında, dolayısıyla $x(t)$ sinyalinin karakteristiği hakkında fikir sahibi olunamamaktadır.

Bu nedenle 3 boyutlu algı modumuzu açarak, Şekil 1.e'deki tüm bu değişkenleri tek bir çatı altında toplamak istediğimiz $x(t)$ sinyalinin 3 boyutlu gösterimi için Şekil 1.f'ye başvurmakta fayda vardır.



Şekil 1.f $x(t)$ genel kompleks eksponansiyel sinyalin gerçel, sanal, genlik ve faz kısımlarının değişiminin üç boyutlu gösterimi.

Şekil 1.f'de x (yatay) eksen $x(t)$ sinyalinin gerçel kısmını, y (düşey) eksen $x(t)$ sinyalinin sanal kısmını ve z (derinlik) eksen ise $x(t)$ sinyalinin genlik değişimini göstermektedir. Dördüncü bir boyuta henüz geçemediğimiz için, takdir edersiniz ki fazın zamanla nasıl değiştiğini göstermek ayrı bir eksen mümkün değildir; ancak Eşitlik 1.g'deki gibi $x(t)$ sinyalinin faz değişiminin, Şekil 1.f'de yer alan x eksenindeki gerçel kısmın ve y eksenindeki sanal kısmın zamana bağlı olarak değişimleri göz önüne alındığında

$$\text{Faz}[x(t)] = \arctan[\sin(\Omega t)/\cos(\Omega t)] \quad (1.g)$$

Eşitlik 1.g'deki oranın (fazın) zamanla spiral değişim göstermesi ve bu spiralliğin, Şekil 1.e'deki gibi sinüsoidal sinyalin eksponansiyel zarfı olarak değişmesi dikkat çekicidir.

Sonuç olarak, $x(t)$ sinyalinin sinüsoidal kısmının zarfı olarak eksponansiyel sönümlenen genlik, z ekseninde spiral karakteristik göstermekte, x ve y eksenlerinin oranına göre değişiklik gösteren fazın (Ω) karakteristiği ise, zamanla (t) sönümlenen genlik formunda yol almakta ve $x(t) = e^{(\alpha+j\Omega)t}$ sinyalinin 3 boyutlu gösterimi Şekil 1.f'deki gibi elde edilip yorumlanabilmektedir.