HAFTA 7: FREKANS BÖLGESİNE DOĞRU: FOURIER SERİLERİ

İçindekiler

BÖLÜM 4: FREKANS BÖLGESİNE DOĞRU: FOURIER SERİLERİ

Bu kitap kapsamında; diğer sinyal işleme kitaplarından farklı olarak, sürekli zaman Fourier serileri (continuous time Fourier series) "tek" ve "çift" sinyallerin tanımı ile anlatılmaya başlanacaktır.

4.1 Tek ve çift sinyaller (Odd & Even signals)

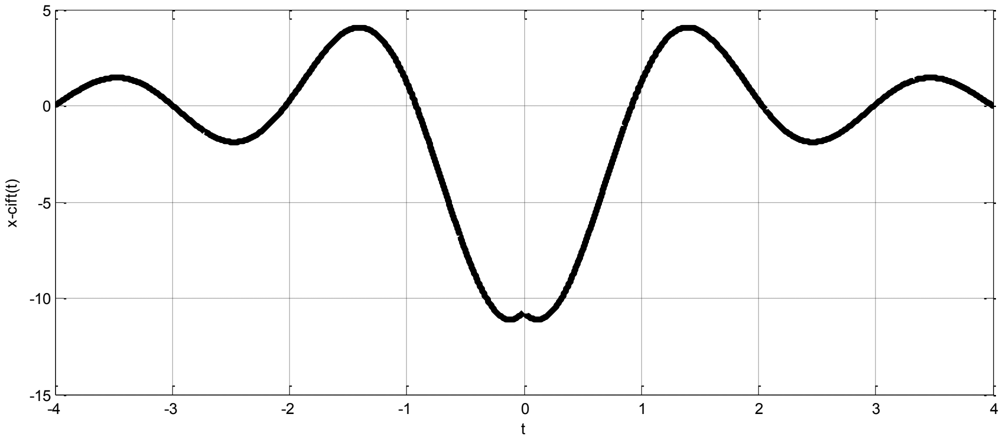
Sürekli zamanda simetrileri kendisine eşit olan sinyallere sürekli zaman çift (even) sinyaller adı verilir. Çift sinyaller Eşitlik 4.1'de verilen özelliği sağlarlar.

$$x(t) = x(-t) \tag{4.1}$$

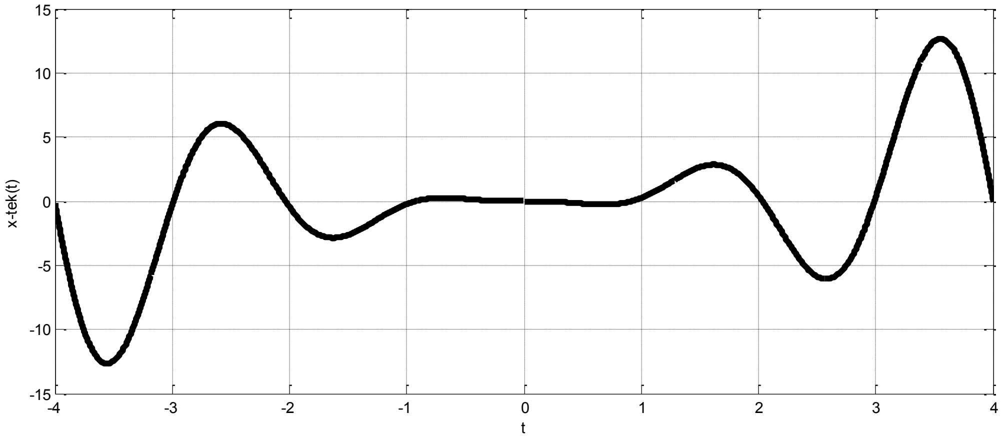
Çift sinyallerin olduğu yerde "tek" sinyallerin olmaması beklenemez. Eşitlik 4.2'de verilen özelliği sağlayan sinyallere ise tek (odd) sinyaller adı verilir.

$$x(t) = -x(-t) \tag{4.2}$$

Tek ve çift sinyallerin bu kadar ünlü olmalarının nedeni, Şekil 4.1'de sunulmuştur. Çift sinyaller düşey eksene (y-eksenine) göre simetri özelliği gösterirken, tek sinyaller orijin noktasına göre simetri özelliği göstermektedirler.



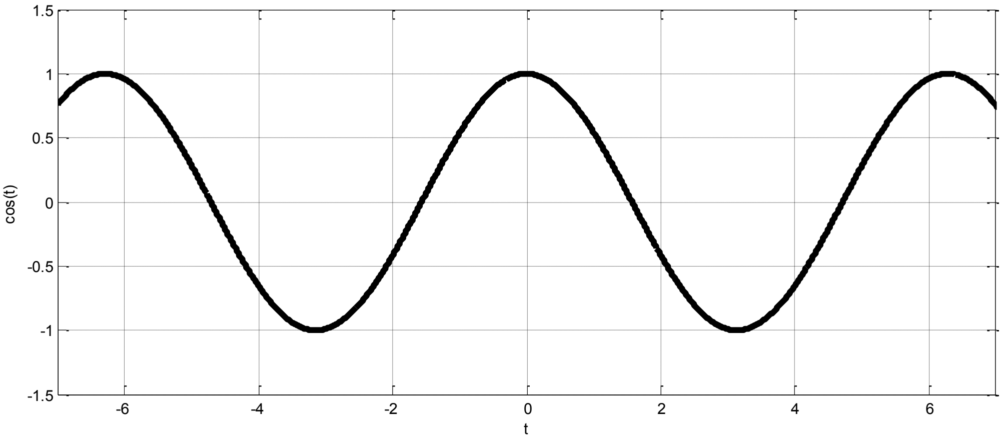
a.



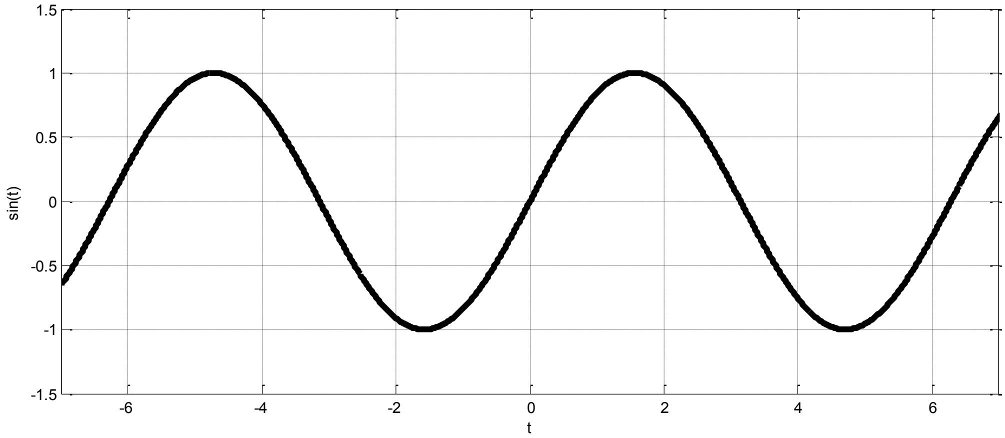
b.

Şekil 4.1 a. Çift sinyal ve b. Tek sinyal örnekleri.

Şekil 4.1 incelendiğinde, insan aklı ister istemez en basit tek ve çift sinyal nedir diye düşünmeden edemez. Acaba düşey eksene göre simetrik en basit sinyal ile orijin noktasına göre simetrik en basit sinyal nedir? Şekil 4.2'de yazarların aklına gelen en basit tek ve çift sinyal sunulmuştur. Eğer Sizin aklınıza daha basit tek ve çift sinyaller geliyorsa Siz de onları kareli kağıda çizmekten çekinmeyin.



a.



b.

Şekil 4.2 a. Çift sinyale örnek olarak kosinüs sinyali ve b. Tek sinyale örnek olarak sinüs sinyali.

4.2 Konjüge simetri ve konjüge anti-simetri özelliği

Tek ve çift simetri özelliklerinin grafiksel olarak Şekil 4.1 ve Şekil 4.2 üzerinden tam olarak anlaşıldığı varsayımından yola çıkarak, zamanda tek ve çift simetri özelliklerini kompleks (karmaşık) bölgeye taşırsak, zamanda konjüge simetri (conjugate symmetric) ve zamanda konjüge anti-simetri (conjugate anti-symmetric) özelliklerine varırız. Eşitlik 4.3, Eşitlik 4.1'de verilen denkleme çok benzemekle birlikte * işareti kompleks konjüge işlemini ifade etmektedir. Bu durumda $x(t)$ fonksiyonunun (ya da sinyalinin) kompleks bir fonksiyon (kompleks değerler içeren bir sinyal) olduğunu söylemek sadece malumun ilanıdır. Eşitlik 4.3 üzerine saatlerce konuşulabilir, ancak çıkarılması gereken son derece basit iki sonuç vardır. Bunlardan birincisi, karmaşık (kompleks) değerlerinden dolayı $x(t)$ fonksiyonunu çizmek Şekil 4.1 veya Şekil 4.2'deki kadar kolay olmayacaktır. Bu kompleks fonksiyonun gerçel ve sanal kısımlarını (ya da genlik ve fazını) Bölüm 1, Bölüm Sonu Soru ve Cevapları bölümünde irdelediğimiz üzere ayrı ayrı çizerek görselleştirmek gerekecektir.

$$x^*(t) = x(-t) \qquad (4.3.a)$$

Varılması gereken ikinci sonuç daha basittir. $x(t)$ fonksiyonunun sadece gerçel olması durumunda konjüge simetrik fonksiyon çift (çift simetrik) fonksiyona dönecektir.

$$x^*(t) = x(t) = x(-t) \qquad (4.3.b)$$

Bu durum aslında çift simetrik fonksiyonların kompleks konjüge fonksiyonların özel bir hali olduğu (zaman sinyali $x(t)$'nin gerçel olması durumunda) gerçeği ortaya çıkarmaktadır.

Madem güneşin sıcak, suyun ıslak olduğunu anlatmaya başladık, tartışmamızı sürekli zaman konjüge anti-simetri özelliği ile bitirelim. Yine malumun ilanı Eşitlik 4.4 ile verilen denklemi sağlayan $x(t)$ sürekli zaman kompleks sinyaller konjüge anti-simetrik sinyaller olarak adlandırılır.

$$x(t) = -x^*(-t) \tag{4.4}$$

Peki birçok kitapta yarım sayfa anlatılan tek ve çift sinyalleri neden bu kitapta iki sayfa anlatıp, kompleks konjüge ve kompleks anti-konjüge tanımları ile birleştirdik. İşin sırrı çift ve tek sinyallerin tanımında gizlidir.

$$Tek\{x(t)\} = 1/2(x(t) - x(-t)) \tag{4.5}$$

$$Çift\{x(t)\} = 1/2(x(t) + x(-t)) \tag{4.6}$$

Tek ve çift fonksiyon tanımlarına göre yazdığımız Eşitlik 4.5 ve Eşitlik 4.6 çok güçlü bir eşitliği barındırmaktadır. Bu iki denklemi toplamamız durumunda Eşitlik 4.7 elde edilir.

$$x(t) = Tek\{x(t)\} + Çift\{x(t)\} \tag{4.7}$$

Basit bir matematiksel özdeşlik gibi görünen Eşitlik 4.7'nin çok ciddi anlamları bulunmaktadır. Herhangi bir sürekli zaman $x(t)$ fonksiyonunu tek ve çift sinyallerin toplamı olarak ifade edebiliriz. Bu cümleyi en az üç kez tekrar okuyunuz. Tek ve çift fonksiyonların, kompleks konjüge ve kompleks anti-konjüge fonksiyonlar ile olan akrabalıkları da göz önüne alındığında "herhangi bir" kelimesi kompleks, gerçel tüm sürekli zaman $x(t)$ fonksiyonları için geçerli olacaktır.

Bir adım öteye giderek, Şekil 4.2'de sunulan temel tek ve çift fonksiyonlara dönersek acaba aşağıdaki önermeyi yapabilir miyiz?

- Sadece sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını kullanarak "herhangi bir" sürekli zaman $x(t)$ fonksiyonunu ifade edebilir miyiz?

Yukarıdaki önermenin son derece iddialı olduğunu belirtmek herhalde gereksizdir. Şekil 4.1 ile Şekil 4.2 arasındaki temel fark Şekil 4.2'de verilen tek ve çift fonksiyonların aynı zamanda periyodik sinyaller olmasıdır. Bu durumda yukarıda sunulan önermeyi aşağıdaki şekilde revize etmeyi öneriyorum.

- Sadece sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını kullanarak "herhangi bir" periyodik sürekli zaman $x(t)$ fonksiyonunu ifade edebilir miyiz?

Eşitlik 4.7 bunu başarabileceğimizi ifade etmektedir. Herhangi bir (tartışmanın genelliğini korumak adına) karmaşık (ya da gerçel), periyodik, sürekli zaman sinyalini tek (sinüs) ve çift (kosinüs) fonksiyonların toplamı olarak ifade edebiliriz (miyiz?)

Felsefenin kenara çekilip, tekrar matematiğe söz bırakması gereken an gelmiştir. İlk akla gelen denklem, Eşitlik 4.8'de sunulmuştur. Bu denklem gereğince, Euler açılımından dolayı karmaşık üstel açılım kullanmak en mantıklısı olmalıdır.

$$e^{j\Omega_k t} = \cos\Omega_k t + j\ \sin\Omega_k t, \qquad j = \sqrt{-1}\ olmak\ \text{üzere}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \quad e^{j\Omega_k t} \tag{4.8}$$

Eşitlik 4.8 ile herhangi bir karmaşık, periyodik, sürekli zaman sinyali $x(t)$, karmaşık sinüs ve kosinüslerin toplamı şeklinde ifade edilebilecektir. Üstel fonksiyonun ($e^{j\Omega_k t}$) önünde yer alan a_k katsayıları, her bir üstel fonksiyonu farklı bir ağırlık ile toplama dahil edecektir. Eşitlik 4.8'de yer alan sürekli zaman sinyalinin periyodik olduğu göz önüne alınır ise Eşitlik 4.8, Eşitlik 4.9'a indirgenebilir.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \quad e^{jk\Omega_0 t} \tag{4.9}$$

Eşitlik 4.8 ile Eşitlik 4.9 arasındaki tek fark Eşitlik 4.9'un temel frekans Ω_0'ın tam harmonik katları olan $\mathrm{k}\Omega_0$ frekanslarında sinüs ve kosinüslerin toplamı olarak ifade edilecek olmasıdır. Sinyalimiz $x(t)$; karmaşık, periyodik ve sürekli zaman sinyali olduğundan herhangi Ω_k frekanslarındaki sinüs ve kosinüslerin toplamı olarak incelemek problemi gereksiz yere zorlaştıracaktır. Sinyalimiz periyodik olduğundan temel bir frekans Ω_0 etrafında analiz etmek işleri çok daha kolaylaştıracaktır. Bu durumda tek bir sorun kalmıştır. a_k katsayılarını acaba nasıl hesaplayabiliriz?

4.3 Sürekli zaman periyodik sinyallerin Fourier serisi gösterimi (Fourier series representation of continuous time periodic signals)

Bilim tarihinde öyle konular ve öyle tartışmalar vardır ki, başladıkları noktaları aşar, tartışmayı başlatanın bile tahmin edemeyeceği yerlere varır. Yukarıda tanımlanan problem 1800'lü yılların başında Jean Baptiste Joseph Fourier'in aklına (Fourier, 1807) takılmıştır. Bu nedenle Fourier kelimesinin geçtiği tüm yerlerde özel isim olması itibarı ile büyük harf (Fourier) kullanılmalıdır. Bu problem aslında 1750'li yıllarda Euler, Bernoulli ve Lagrange tarafından da incelenmiştir. Böylesine saygın isimlerin zamanını alan denklemi tekrar inceleyelim.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \quad e^{jk\Omega_0 t}$$

İnsanın ilk olarak aklına her iki tarafı $e^{-jk\Omega_0 t}$ ile çarpmak geliyor, öyle değil mi? Ama burada hemen başka bir sorun su yüzüne çıkıyor: k'nın hangi değeri ile? Çünkü k, eksi sonsundan artı sonsuza kadar değişen ve aslında sinüs ve kosinüslerin temel frekanslarının harmoniklerini gösteren bir tam sayı değişkeni. Oysa biz değişkenlerden kurtulmaya çalışıyoruz.

$$x(t)e^{-jk\Omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \quad e^{jk\Omega_0 t}e^{-jk\Omega_0 t}$$

Bu durumda biz her iki tarafı $e^{-jn\Omega_0 t}$ ile çarpalım. Peki n nedir? Ne olursa olsun, tam sayı olsun da. Mesela isterseniz $n = 0$ olsun, ya da $n = 1$, dilediğiniz değeri vererek Eşitlik 4.10'da yerine koyun. Çok ilginç sonuçlar elde ettiğinizi göreceksiniz.

$$x(t)e^{-jn\Omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \quad e^{jk\Omega_0 t}e^{-jn\Omega_0 t} \tag{4.10}$$

Buraya kadar gelmişken bu denklem burada bırakılmaz. Acaba bundan sonra ne yapmalıyız? Görebildiniz mi? Göremediyseniz üzülmeyin, Euler, Bernoulli ve Lagrange da görememişti. Fourier'e kısmet olan adım Eşitlik 4.11'de verilmiştir.

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt = \int_0^T \left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \quad e^{k\Omega_0 t}e^{-jn\Omega_0 t}\right\}dt \tag{4.11}$$

Eşitlik 4.11'de verilen, bir periyot boyunca alınan integralin literatürde çok büyük bir önemi vardır. T, periyodik $x(t)$ sinyalinin temel periyodu olmak üzere,

$$T = \frac{1}{\mathrm{f}_0} = \frac{2\pi}{\Omega_0} \tag{4.12}$$

İntegralin toplamı, toplamın integraline eşit olacağından,

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\Omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_0^T e^{jk\Omega_0 t}e^{-jn\Omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_0^T e^{j(k-n)\Omega_0 t}dt \tag{4.13}$$

$\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\mathrm{k}-\mathrm{n})\Omega_0 \mathrm{t}}\mathrm{dt}$ integrali kilit önem kazanmaktadır. Bu dersi alan bir öğrenci bu integrali çok rahatlıkla çözebilir. Benim tek vereceğim ipucu $k = n$ olması durumu ile $k \neq n$ durumlarının mevzu bahis olduğuna dikkat etmeniz gerekliliğidir. $k \neq n$ için bu integralin sonucu kocaman bir sıfır çıkmaktadır.

$$\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{dt} = T, k = n$$

$$\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{jm\Omega_0 \mathrm{t}} \mathrm{dt} = 0,\ k \neq n, m \in Z$$

(4.14)

Doğrusal cebir derslerine geri dönersek, ortogonalite gereği k'nın n'den farklı tüm değerleri için Eşitlik 4.14'te verilen integral sıfır çıkmaktadır. Diğer bir deyişle, Eşitlik 4.13'ün sağ tarafı sadece $k = n$ olduğunda T değerini vermekte, k'nın diğer tüm değerleri için toplama gelen değerler sıfır olduğundan sonucu etkilememektedir. Bu durumda a_k katsayılarını Eşitlik 4.15 aracılığı ile hesap etmeyi başarmış oluruz.

$$\int_0^{T} x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt \ = a_k T$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt \qquad (4.15)$$

Başladığımız noktaya geri dönersek, Eşitlik 4.16 sürekli zaman, periyodik sinyaller için Fourier serisi çifti olarak adlandırılır. Bu kadar emeğin ardından a_k haklı olarak **Fourier serisi katsayıları**, ilk denklem **sentez denklemi** (a_k katsayılarını kullanarak zaman sinyalini sentez ettiğimiz için) ve ikinci denklem ise **analiz denklemi** (zaman sinyalinin analizi sonucu Fourier serisi katsayılarını hesapladığımız için) olarak adlandırılır.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \quad e^{jk\Omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_0^{T} x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt \ , \quad T = \frac{2\pi}{\Omega_0}$$

(4.16)

Eşitlik 4.9'dan bu tarafa çok yol kat ettiğimiz bilinci ile Fourier serisi çiftini iyi bir incelemeye tabi tutmakta fayda vardır. Bu iki denklem ezberlenemeyecek kadar mükemmeliyet içermektedir. Aşağıdaki soruları Eşitlik 4.16 ile verilen çifti içselleştirebilmeniz maksadıyla veriyorum.

- Bazı kaynaklarda verilen sentez denkleminde kompleks eksponansiyel üzerinde eksi (-) analiz denkleminde ise eksi olması gerekirken hiçbir işaret bulunmamaktadır (yani +). Acaba hangi denklem çifti doğrudur? Tüm ispatın başlangıç noktası olan Eşitlik 4.9'dan itibaren diğer kaynaklarda yer alan Fourier serisi çiftinin doğruluğunun ispatı (ortogonalitenin bir özelliği olarak) okuyucuya bırakılacaktır.
- $x(t)$ sürekli zaman periyodik sinyali gerçel ise a_k katsayıları gerçel çıkmak zorunda mıdır? Denklem içinde bulunan $j = \sqrt{-1}$ ifadesi kafa karıştırmaktadır.
- $x(t)$ sürekli zaman sinyali olduğuna göre neden sentez denkleminde kesikli ifadeler için kullanılan toplam (sigma) işareti bulunmaktadır? Kesikli olan nedir?
- Toplama işaretinin sınırları sonsuza kadar gitmektedir. Bu durumda hangi periyodik sinyaller için sonsuz harmoniğin toplamı gerekmektedir. Sentez denklemini bilgisayar üzerinde bir simülasyon için kullandığımda toplamı sonsuza kadar alamayacağıma göre sınırlı sayıda harmonik kullanmam durumunda bunun sürekli zaman periyodik $x(t)$ sinyali üzerinde nasıl bir etkisi olacaktır?

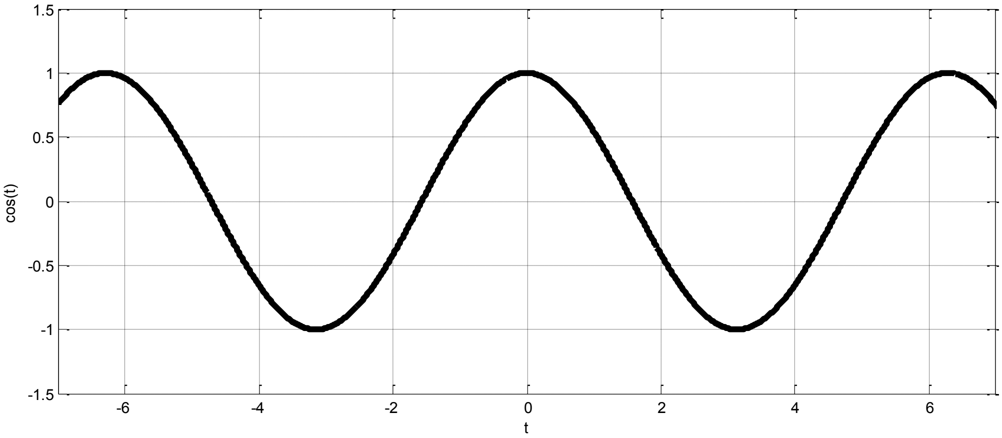
Örnek 4.1

Başladığımız noktaya geri dönersek; sadece sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını kullanarak "herhangi bir" periyodik sürekli zaman $x(t)$ fonksiyonunu ifade edebileceğimizi gördüğümüze göre, vardığımız sonuçların en basit sinyaller için nasıl çalıştığını görmekten daha temel bir merak olamaz. Akla gelen en temel sinyaller

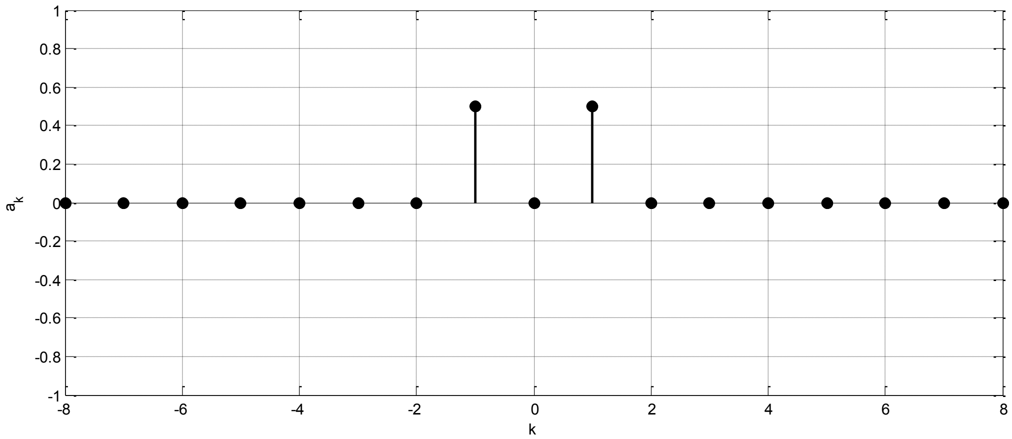
a) $x(t) = \cos \Omega_0 t$
b) $x(t) = \sin \Omega_0 t$
c) $x(t) = e^{j\Omega_0 t}$

olarak belirlenebilir. Mademki, "herhangi bir" sürekli zaman periyodik sinyali sinüs ve kosinüsler cinsinden ifade edebiliyoruz, o zaman acaba sinüs ve kosinüsü nasıl ifade ediyoruz? Sinüs ve kosinüslerden oluşan karmaşık üstel bir fonksiyonu acaba nasıl ifade ediyoruz?

a. $x(t) = \cos \Omega_0 t = \frac{e^{-j\Omega_0 t} + e^{j\Omega_0 t}}{2}$ olarak yazılabileceğinden $a_{-1} = \frac{1}{2}$ ve $a_1 = \frac{1}{2}$ olduğu açıktır (dileyen analiz denklemini kullanarak aynı sonuca varabilir), diğer a_k değerlerinin sıfır olması gerektiği açıktır. Şekil 4.3.a'da $x(t) = \cos \Omega_0 t$, Şekil 4.3.b'de ise a_k değerlerinin grafiği sunulmuştur. $x(t) = \cos \Omega_0 t$ örneğimiz için a_k katsayılarının gerçel (sadece reel) bileşenlerden oluştuğuna dikkat ediniz.



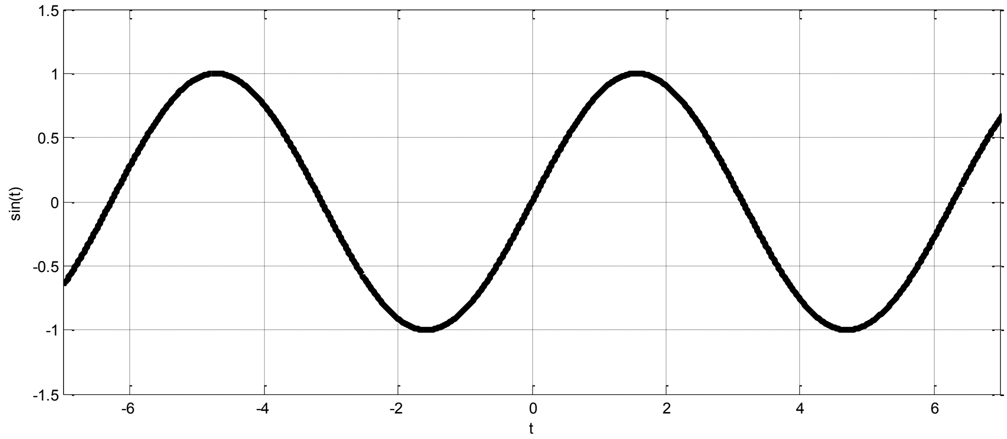
a.



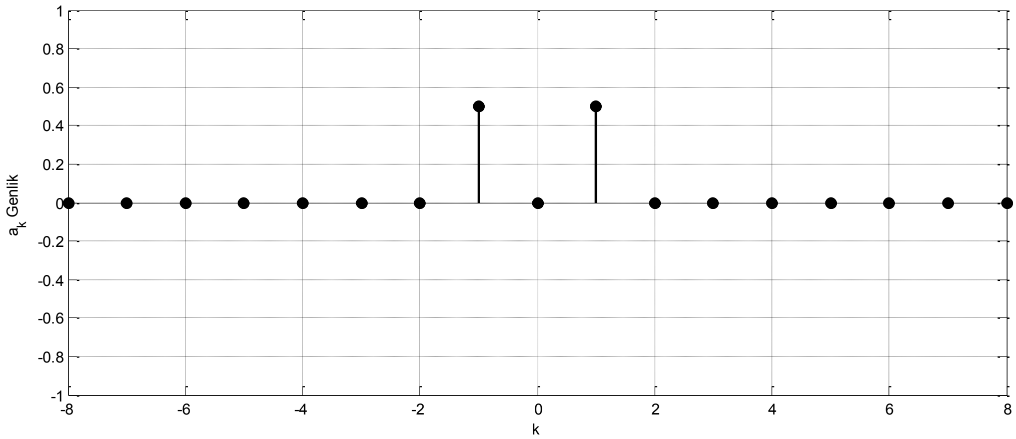
b.

Şekil 4.3 a. $x(t) = \cos \Omega_0 t$, b. x(t) sinyalinin a_k Fourier serisi katsayıları.

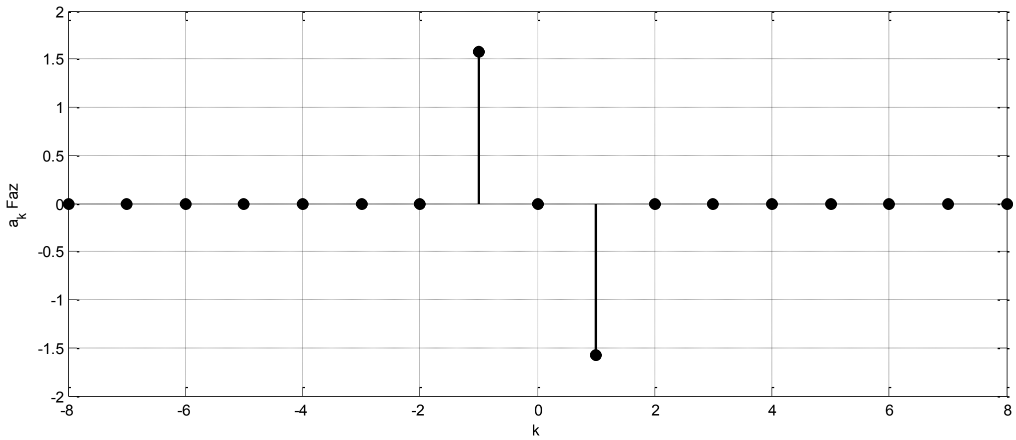
b. $x(t) = \sin \Omega_0 t = \frac{e^{j\Omega_0 t} - e^{-j\Omega_0 t}}{2j}$ olarak yazılabileceğinden $a_{-1} = -\frac{1}{2j}$ ve $a_1 = \frac{1}{2j}$ olduğu açıktır (dileyen analiz denklemini kullanarak aynı sonuca varabilir), diğer a_k değerlerinin sıfır olması gerektiği açıktır. Şekil 4.4.a'da $x(t) = \sin \Omega_0 t$, Şekil 4.4.b'de ve Şekil 4.4.c'de ise a_k Fourier serisi katsayılarının sırasıyla genlik ve faz değerlerinin grafiği sunulmuştur. $x(t) = \sin \Omega_0 t$ örneğimiz için a_k katsayılarının sadece sanal (purely imaginary) bileşenlerden oluştuğuna dikkat ediniz. Bu nedenle a_k katsayılarının çizimi sırasında bir sıkıntı yaşamayız ancak genel olarak a_k katsayılarının karmaşık olabileceği gerçeğinden hareketle genlik ve faz kısımları ayrı ayrı çizilmiştir.



a.



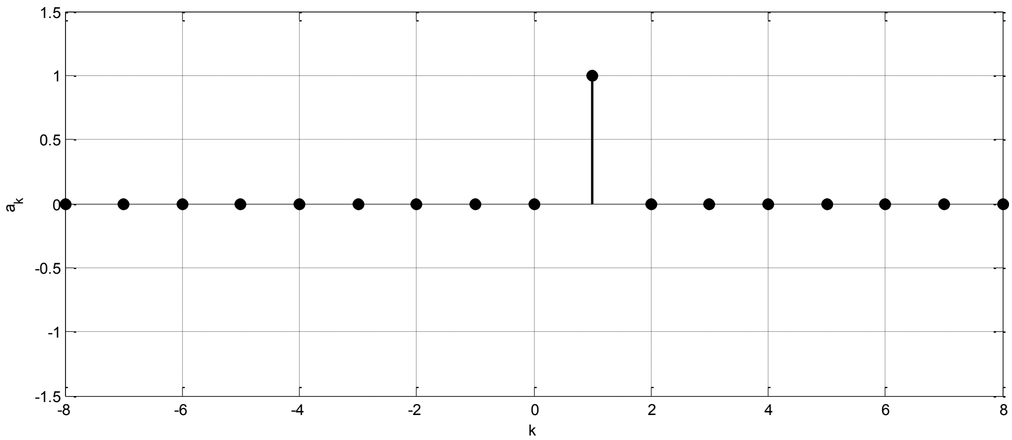
b.



c.

Şekil 4.4.a $x(t) = \sin \Omega_0 t$, b. $x(t)$ sinyaline karşılık gelen Fourier serisi katsayılarının genlik gösterimi ve c. $x(t)$ sinyaline karşılık gelen Fourier serisi katsayılarının faz gösterimi.

c. $x(t) = e^{j\Omega_0 t}$ olarak yazılabileceğinden $a_1 = 1$ olduğu açıktır (dileyen analiz denklemini kullanarak aynı sonuca varabilir), diğer a_k değerlerinin sıfır olması gerektiği açıktır. Şekil 4.5'te sadece a_k değerlerinin grafiği sunulmuştur zira $e^{j\Omega_0 t}$ karmaşık bir fonksiyon olduğundan kartezyen koordinat sisteminde gösterimi mümkün değildir. Buna ek olarak $x(t) = e^{j\Omega_0 t}$ sinyali için a_k katsayılarının genlik ve faz kısımlarının ayrı ayrı çizimi okuyucuya bırakılmıştır.



Şekil 4.5 $x(t) = e^{j\Omega_0 t}$ karşılık gelen Fourier serisi katsayıları.

Örnek olarak sunulan her üç sinyal ($x(t) = \cos\Omega_0 t\, , x(t) = \sin\Omega_0 t\; ve\; x(t) = e^{j\Omega_0 t}$) sırasıyla purely real, purely imaginary ve purely real olduğundan doğrudan yukarıdaki gibi bir gösterim ile ifade edilebilirler. Bakalım hepimiz gördüğümüzü anlıyor muyuz? Anladığımızı ne şekilde yorumluyoruz. Kosinüs sinyaline ait Fourier serisi katsayıları bizi yanıltmasın, sinüs sinyali tamamen gerçel olmasına rağmen Fourier serisi katsayıları karmaşık (hatta sadece sanal, purely imaginary) çıkmıştır. Buna inat karmaşık $e^{j\Omega_0 t}$ sinyalinin Fourier serisi katsayıları (Türkçemizi doğru kullanmak gerekirse katsayısı) gerçel çıkmıştır. Bu durumda "gerçel sinyallerin gerçel ya da sanal Fourier serisi katsayıları vardır" demek gibi bir genelleştirme mümkün görünmemektedir.

Bununla birlikte gerçel sinyallerin hem negatif indisli, hem de pozitif indisli Fourier serisi katsayıları çıkmaktadır. *Benzer şekilde karmaşık zaman sinyallerinin sadece pozitif indisli Fourier serisi katsayıları hesaplanmıştır.* Acaba bu bir rastlantı mıdır?

Tek bir bileşene sahip (tek bir sinüs ya da tek bir kosinüs) zaman sinyaline ait sadece tek bir Fourier serisi katsayısı çıkmıştır ($a_{\mp 1}$). Bu durumda "herhangi bir sinyali sinüs ve kosinüsler cinsinden ifade edebiliyoruz" önermesini tersten okuduğumuzda Fourier serisi analizi herhangi bir periyodik, sürekli zaman sinyalini Fourier serisi katsayılarına parçalamakta, dağıtmaktadır. Diğer bir deyişle herhangi bir periyodik, sürekli zaman sinyalinin kompozisyonunu Fourier serisi analizi ile görebilmekteyiz. Tıpkı karmaşık bir malzemenin elementlerine ayrıştırılması ya da karmaşık bir kelimenin hecelerine bölünmesi gibi… Elimizde çok güçlü bir araç olduğunu artık anlamış olmalıyız.

Örnek 4.2

Artık sürekli zaman periyodik sinyallerin Fourier serisi gösterimi konusunda üstat olduğumuza göre sinüs ve kosinüsten daha karmaşık sinyallerin analizine geçebiliriz diye düşünüyorum. Sürekli olarak aklıma takılan bir sorunun cevabını arayacağımız bir sinyal: Kare dalga. Bu sinyalin sürekli zaman, periyodik sinyallerin gösteriminde özel bir yeri bulunmaktadır, zira bir periyot boyunca sınırlı sayıda da olsa süreksizlik içermektedir. Acaba nasıl oluyor da, sinüs ve kosinüs gibi süreksizlik içermeyen sinyallerin toplamı süreksizlik içeren kare dalga gibi periyodik bir sinyali verebiliyor.

- Eşitlik (4.17), temel periyodu *T*, 1 değerini alma süresi (duty cycle) $2T_1$ olan bir kare dalganın analitik denklemini ifade etmektedir.

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -T_1 < t < T_1 \\ 0, & -{}^{T}\!/_{2} < t < -T_1 \; ve \; T_1 < t < {}^{T}\!/_{2} \end{cases} \tag{4.17}$$

Şimdi, bu kare dalganın Fourier serisi katsayılarını Eşitlik 4.18'deki adımlarla hesaplayalım:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\Omega_0 t}\,dt \\ &= \frac{1}{T}\left[\int_{-T/2}^{T_1} x(t)e^{-jk\Omega_0 t}\,dt + \int_{-T_1}^{T_1} x(t)e^{-jk\Omega_0 t}\,dt + \int_{T_1}^{T/2} x(t)e^{-jk\Omega_0 t}\,dt\right] \\ &= \frac{1}{T}\left[0 + \int_{-T_1}^{T_1} x(t)e^{-jk\Omega_0 t}\,dt + 0\right] \\ &= \frac{1}{T}\frac{1}{(-jk\Omega_0)}e^{-jk\Omega_0 t}\Big|_{t_1=-T_1}^{t_1=T_1} \\ &= \frac{1}{T}\left[\frac{e^{-jk\Omega_0 T_1} - e^{jk\Omega_0 T_1}}{(-jk\Omega_0)}\right] \\ &= \frac{e^{jk\Omega_0 T_1} - e^{-jk\Omega_0 T_1}}{2j}\frac{2}{k\Omega_0 T} \\ &= \frac{2sin(k\Omega_0 T_1)}{k\Omega_0 T} \\ &= \frac{sin\left(k\frac{2\pi}{T}T_1\right)}{\pi k} \end{aligned} \tag{4.18}$$

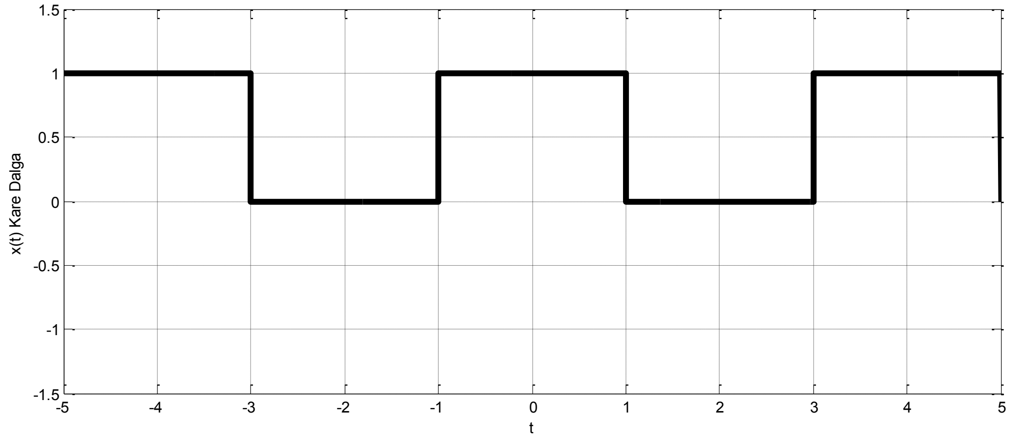
$T = 4T_1$ (duty cycle 50%) için Eşitlik 4.18, Eşitlik 4.19'daki formu almaktadır.

$$a_k = \frac{1}{2}\frac{sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k\frac{\pi}{2}}$$

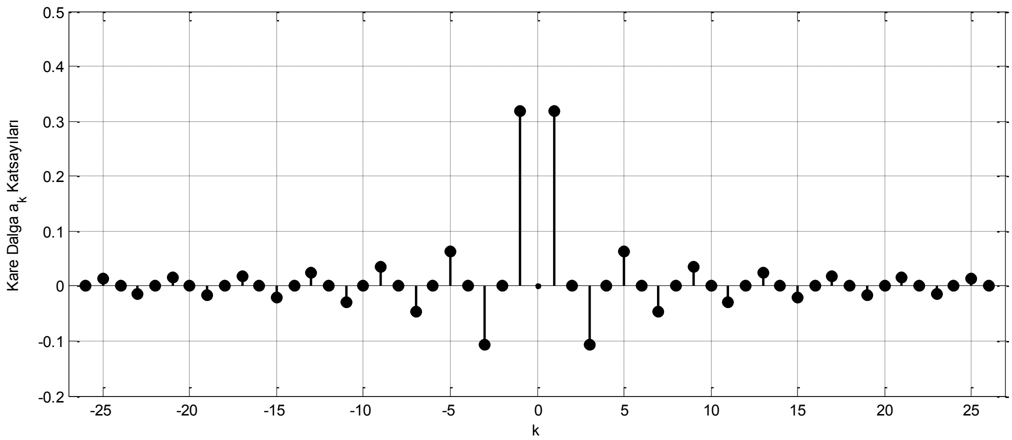
(4.19)

4.3.1 Gibbs etkisi

50 harmonik gösterimini inceleyeceğimiz periyodik ve simetrik kare dalga için k'nın -26'dan +26'ya aldığı değerler için Şekil 4.6.a'daki $x(t)$ kare dalga sinyalinin Fourier serisi katsayıları Şekil 4.6.b'de, Eşitlik 4.19 uyarınca elde edilmiştir. Bu sinyalin farklı sayıda harmonik ile analizini kitabımızda sunulan MATLAB kodlarını düzenleyerek elde edebilirsiniz.



a.



b.

Şekil 4.6 a. $x(t)$ periyodik kare dalga sinyali ve b. $x(t)$ sinyalinin Fourier serisi katsayıları.

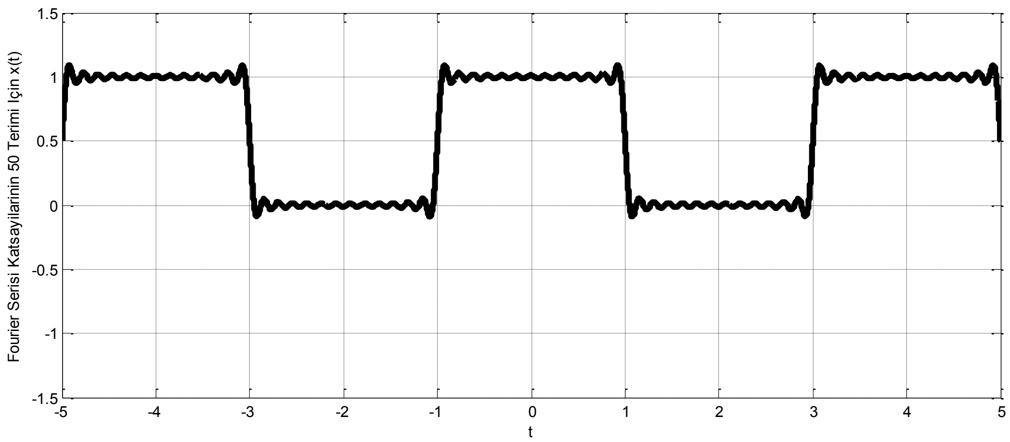
Eşitlik 4.16'daki sentez denkleminin özel bir hali Eşitlik 4.20'de sunulmuştur. Eşitlik 4.20, sürekli zaman periyodik sinyali sonsuz harmonik için değil, sadece 2N harmonik için sentezlemektedir. Fourier serisi katsayılarının Şekil 4.6.b'deki 50 harmoniği kullanılarak yeniden elde edilen $\hat{x}(t)$ sinyali Şekil 4.7'de görülmektedir.

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k \quad e^{jk\Omega_0 t}$$

$$fark(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

(4.20)

Şekil 4.7'de gözlemlediğiniz tepeciklerin (ripples) süreksizlik bölgesine yaklaştıkça artmasının nedeni sürekli zaman periyodik sinyalin N gibi sınırlı sayıda harmonik ile elde edilmesinden kaynaklanmaktadır. Bu etkiyi ilk olarak (her ne kadar Henry Wilbraham tarafından 1848 yılında keşfedilmiş olsa da) Gibbs gözlemlediğinden, Gibbs etkisi (Gibbs, 1898) olarak anılmaktadır. MATLAB kodlarını kullanarak farklı N değerleri için Gibbs etkisinin (Gibbs phenomenon) nasıl bir özellik gösterdiğini incelemeniz faydalı olacaktır. Her zaman olduğu gibi bir ipucu vererek artan N değerleri için tepeciklerin süreksizlik noktalarına doğru sıkıştığını ve sönümlemenin (overshoot) çok daha hızlı gerçekleştiğini gözlemleyebilirsiniz. Bu durumda tepeciklerden kaynaklanan enerjinin (tepeciklerin maksimum genliği değil) dikkate değer olmaması için N (3 yeter mi? Yoksa 3,000 mi olmalı) değerinin yeterince yüksek seçilmesi gerektiğini anlayabilirsiniz.



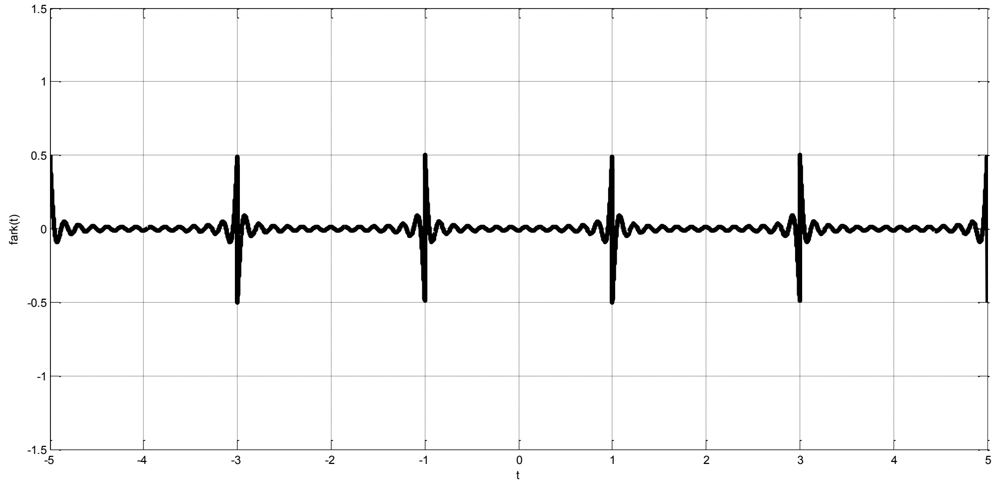
Şekil 4.7 Sadece 50 harmonik kullanılarak elde edilen $\hat{x}(t)$ sinyali, Gibbs etkisi

4.3.2 Fourier serisi yakınsama özelliği

Temel matematik derslerinden bize öğretilen serilerin yakınsama özellikleridir. Diğer bir deyişle Fourier serisi analiz denkleminden elde ettiğimiz $\mathrm{a_k}$ değerleri sonlu değerler almakta mıdır? Diğer bir soru ise, $\mathrm{a_k}$ değerleri sonlu değerler alsa bile, sentez denklemine koyduğumuzda acaba bize sürekli zaman periyodik sinyali $x(t)$'yi vermekte midir ya da ne kadar doğru vermektedir? Eşitlik 4.20'de sunulan $fark(t)$ sinyalinin her bir t anı için farklı değerleri olacağından acaba $\mathrm{a_k}$ değerlerini kullanarak elde edeceğimiz $\lim_{N\to\infty} \hat{x}(t)$ sinyali Fourier serisi analizini gerçekleştirdiğimiz sürekli zaman periyodik $x(t)$ sinyalinden ne kadar farklı olacaktır?

$$Enerji\{\,fark(t)\} = \int_0^T |fark(t)|^2 dt \tag{4.21}$$

Bu sorunun cevabı aslında basittir, eğer Eşitlik 4.20'de verilen fark sinyalinin enerjisi sıfıra yakınsıyorsa, $\lim_{N\to\infty} Enerji\{\,fark(t)\} = 0$ Fourier serisi katsayılarının yakınsak olduğu anlamına gelir. İşin gerçeği elektrik-elektronik mühendislerinin karşılaşması muhtemel tüm sürekli zaman periyodik sinyaller Fourier serisi katsayıları ile ifade edilebilir, yani yakınsaktır.



$Enerji\{\,fark(t)\}$=39.2116

Şekil 4.8 50 harmonik için $fark(t)$ sinyali ve enerji değeri.

MATLAB kodlarını kullanarak farklı N değerleri için *fark(t)* sinyalinin enerjisinin nasıl değiştiğini inceleyiniz.

4.3.3 Fourier serisinin yakınsamadığı durumlar, Dirichlet koşulları

P.L. Dirichlet adlı şahıs, şahsına münhasır sinyaller bulmuş ve bunları ana başlıklar altında kategorize etmeyi başarmıştır. Dirichlet koşulları (Dirichlet,1829) adını verdiğimiz koşulları sağlamayan sinyalleri sürekli zaman ve periyodik olmalarına rağmen Fourier serisi katsayıları ile ifade edemeyiz, çünkü bu sinyaller için Fourier serilerinin yakınsama özelliğinden bahsedemeyiz. "4.3.2 Fourier serisi yakınsama özelliği" bölümü altında bahsedildiği üzere her ne kadar bu sinyaller ile elektrik-elektronik mühendislerinin karşılaşma olasılığı pek bulunmasa da sürekli zaman periyodik sinyallerin Fourier serisi gösterimini verip, Dirichlet koşullarından bahsetmemek olmaz.

Koşul 1: Bir periyot boyunca $x(t)$ mutlak integrali alınabilir olmalıdır. Eşitlik 4.22 sağlandığında $|\mathrm{a_k}| < \infty$ olacağından tüm sürekli zaman periyodik sinyaller için Koşul 1 sağlanmalıdır.

$$\int_0^T |x(t)| \quad dt \ < \infty \tag{4.22}$$

Koşul 2: Sürekli zaman periyodik sinyalin bir periyodu boyunca sınırlı sayıda minimum ve sınırlı sayıda maksimum bulunmalıdır.

Koşul 3: Sürekli zaman periyodik sinyal, bir periyodu boyunca sınırlı sayıda süreksizlik içermelidir.