HAFTA 8: FOURIER SERİLERİ ÖZELLİKLERİ

İçindekiler

4.4. Fourier serisinin özellikleri

Sürekli zaman periyodik sinyallerin Fourier serisi gösterimi birçok özellik sergilemektedir. Bu bölümde; bu özellikler detaylı bir biçimde açıklanacak, bir kısmı ispatlanacak, bir kısım ispat ise okuyucuya bırakılacaktır. Açıklamaların ardından Fourier Serisi (FS) özellikleri bir tablo altında özetlenecektir. Sürekli zaman periyodik sinyallerin Fourier serisi gösterimine ait özelliklere bu denli özen gösterilmesinin ve bu detayda incelenmesinin nedeni, sunulacak olan özelliklerin tüm Fourier dönüşümü gösterimleri için büyük bir benzerlik gösteriyor olmasıdır. Bu nedenle sağlam atılacak bir temelin, bu özelliklerin iyi anlaşılması açısından önemli olacağı değerlendirilmektedir.

Bundan sonraki bölümlerde Eşitlik 4.23'te sunulan tanımlar kullanılacaktır. Eşitlik 4.23'te FS, Fourier serisi analiz denklemini, FS^{-1} ise Fourier serisi sentez denklemini ifade etmektedir.

$$a_k = FS\{x(t)\}$$

$$b_k = FS\{y(t)\}$$

$$x(t) = FS^{-1}\{a_k\}$$

$$y(t) = FS^{-1}\{b_k\} \qquad (4.23)$$

4.4.1 Doğrusallık özelliği (Linearity property)

Sürekli zaman periyodik sinyallerin Fourier serisi gösterimi doğrusaldır. Diğer bir deyişle, S1 ve S2 birer sabit olmak üzere,

$$z(t) = S_1 x(t) + S_2 y(t)$$

$$c_k = FS\{z(t)\} = FS\{S_1 x(t) + S_2 y(t)\} = S_1 a_k + S_2 b_k \qquad (4.24)$$

Eşitlik 4.24 sağlanmaktadır.

Örnek 4.3:

$x(t) = \cos\Omega_0 t$ ve $y(t) = \sin\Omega_0 t$ olmak üzere $x(t)$ ve $y(t)$ fonksiyonlarının Fourier serisi katsayıları biliniyorsa, $z(t) = e^{j\Omega_0 t} = \cos\Omega_0 t + j\sin\Omega_0 t,\ j = \sqrt{-1}$ fonksiyonunun Fourier serisi katsayılarını doğrusallık özelliğini kullanarak hesaplayınız.

Örnek 4.1 için a_k ve b_k katsayılarını daha önce hesaplamıştık. S1'in 1, S2'nin j olduğundan hareketle,

$a_{-1} = \frac{1}{2}$ ve $a_1 = \frac{1}{2}$

$b_{-1} = -\frac{1}{2j}$ ve $b_1 = \frac{1}{2j}$

$c_k = FS\{z(t)\} = FS\{S_1 x(t) + S_2 y(t)\} = a_k + jb_k$

$c_{-1} = \frac{1}{2} - \frac{j}{2j} = 0$ ve $c_1 = \frac{1}{2} + \frac{j}{2j} = 1$ olarak hesaplanır.

Bu durumda Fourier serisi katsayılarını hesaplamak istediğimiz herhangi bir $z(t)$ sinyalini birden çok sinyalin toplamı olarak ifade edebiliyor isek, bu sinyalin Fourier serisi analizini gerçekleştirmek yerine, Fourier serilerinin doğrusallık özelliğinden faydalanarak Fourier serisi katsayılarını bildiğimiz sinyallerin toplamı olarak hesaplayabiliriz. Doğrusallık özelliği bize karmaşık (zor) gelen sürekli zaman periyodik sinyallerin Fourier serisi katsayılarının analizinde büyük kolaylık sağlar. Ne de olsa karmaşık bir problemi kendisinden daha basit birçok doğrusal probleme ayırabiliyor, bu basit problemleri çözüp topladığımızda karmaşık problemin çözümüne ulaşabiliyor isek doğrusallık özelliğini kullanmak son derece yerinde, uygun ve doğru bir yaklaşım olacaktır.

4.4.2 Zamanda tersine çevirme özelliği (Time Reversal Property)

Bu özellik yazarlar tarafından özellikle önemli bulunmaktadır. Bunun nedeni özelliğin bizzat kendisi değil, özelliğin ispatı sırasında karşılaşılan zarif matematiksel incelemedir.

Eşitlik 4.23'te verildiği üzere $x(t)$ sinyalinin Fourier serisi katsayıları a_k'yı bildiğimize göre acaba $x(-t)$'nin Fourier serisi katsayıları a_k cinsinden hesaplanabilir mi? Bu sorunun başlangıç noktası, periyodik olan $x(t)$ sinyalinin periyodunun $\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\Omega_0}$ olarak değişmeden kalacak olmasıdır. Fourier serisi sentez denklemini tekrar incelersek:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \quad e^{jk\Omega_0 t}$$

$$y(t) = x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \quad e^{jk\Omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \quad e^{-jk\Omega_0 t}$$

(4.25)

Eşitlik 4.25'i elde etmiş oluruz. Fourier serisi sentez denkleminin çekirdeği $e^{jk\Omega_0 t}$ olduğundan amacımız HER ZAMAN dönüşümü orijinal çekirdeğine benzetmek olmalıdır. $m = -k$ değişken dönüşümü kullandığımızda

$$y(t) = x(-t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{-m} \quad e^{jm\Omega_0 t}$$

$$b_k = FS\{y(t)\} = a_{-k} \tag{4.26}$$

$x(-t) = FS^{-1}\{a_{-k}\}$ olacaktır. Diğer bir deyişle zamanda tersine çevirme özelliği, zamanda tersine çevrilmemiş periyodik sinyale ait Fourier serisi katsayılarına ait indislerin tersine çevrilmesi ile elde edilebilecektir: $b_k = a_{-k}$.

Bu bölümü bitirmeden önce meraklı öğrencilerin zamanda tersine çevirme özelliği konusunda bir miktar daha ileri gitmek istediklerini düşünüyorum. Bölümün başında incelediğimiz tek ve çift sinyallere geri dönelim. Çift sinyaller için $x(t) = x(-t)$, $a_k = a_{-k}$ tek simetrik sinyaller için $x(t) = -x(-t)$, $a_k = -a_{-k}$ olacağından, zamanda çift simetrik sinyallerin Fourier serisi katsayıları da çift simetrik, zamanda tek simetrik sinyallere ait Fourier serisi katsayıları da tek simetrik olacaktır. Bu özellik bir paragrafta özetlenmiş olsa da Fourier Dönüşümü aktarıldığında son derece faydalı sonuçları olduğu görülecektir.

4.4.3 Konjüge simetri özelliği (Conjugate symmetry)

Tek ve çift simetrik sinyallerden bahsettikten sonra hemen ardından konjüge simetri özelliğinden bahsetmeden olmaz. Eşitlik 4.27'de her iki tarafın kompleks konjügesini aldığımızda,

$$x(t) = FS^{-1}\{a_k\}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \quad e^{jk\Omega_0 t}$$

$$x^*(t) = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, e^{jk\Omega_0 t} \right\}^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* \, (e^{jk\Omega_0 t})^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* \, e^{-jk\Omega_0 t} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{-m}^* \, e^{jm\Omega_0 t}$$

$$x^*(t) = FS^{-1}\{a_{-k}^*\}$$

(4.27)

Eşitlik 4.27'yi görüp $x(t)$ sinyalinin gerçel olması durumunda neler olur sorusunu sormadan geçemeyiz.

$$x(t) = x^*(t) \text{ ise}$$

$$a_k = a^*_{-k} \tag{4.28}$$

Eşitlik 4.28, $x(t)$ sinyalinin gerçel olması durumunda Fourier serisi katsayılarının konjüge simetrik olacağını göstermektedir. Bu durum birçok ilginç Fourier serisi özelliği silsilesine neden olacaktır.

i) Gerçel sinyallere ait Fourier serisi katsayılarının genlik "spektrumu" çift simetrik çıkar: $a_k = a^*_{-k}$, $|a_k| = |a_{-k}|$.

ii) Gerçel sinyallere ait Fourier serisi katsayılarının faz "spektrumu" tek simetrik çıkar.

iii) Gerçel sinyaller aynı zamanda çift simetrik ise, Fourier serisi katsayıları hem gerçel hem de çift simetriktir.

iv) Gerçel sinyaller aynı zamanda tek simetrik ise, Fourier serisi katsayıları tamamen sanal (purely imaginary) ve tek simetriktir.

v) Gerçel sinyal tek ve çift kısımların toplamı olarak ifade edilebileceğinden, sinyalin çift kısmının Fourier serisi katsayıları; sinyalin Fourier serisi katsayılarının gerçel kısmını $Re(a_k)$, sinyalin tek kısmının Fourier serisi katsayıları ise sinyalin Fourier serisi katsayılarının sanal kısmını $j\ Im(a_k)$ verir.

vi) Sürekli zaman, periyodik sinyalimiz gerçel olduğunda acaba Fourier serisi analizi için neler söyleyebiliriz?

Yukarıda gördüğünüz (i) maddesinin ispatına benzer bir biçimde (ii), (iii), (iv) ve (v) maddelerini ispatlayarak bulmanız sınavlardaki başarınız için son derece faydalı olacaktır. Bununla birlikte (vi) bendindeki yorum biraz daha karışık olabilir.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \quad e^{jk\Omega_0 t}$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k e^{jk\Omega_0 t} + a_{-k} e^{-jk\Omega_0 t} \right\}$$

$$a_k = a^*_{-k}\ olduğundan\ a_{-k} = a^*_k$$

$$x(t) = a_0 + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k e^{jk\Omega_0 t} + a^*_k e^{-jk\Omega_0 t} \right\} \tag{4.29}$$

Bir karmaşık fonksiyonu, aynı karmaşık fonksiyonun karmaşık konjügesi ile toplarsak

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{ a_k e^{jk\Omega_0 t} \right\}$$

elde ederiz. Elektrik-elektronik mühendisliğinde Kompleks Fonksiyonlar Teorisinin bu kadar çok kullanılacağı hiç aklınıza gelir miydi? a_k'yı kutupsal formda ifade edersek;

$$a_k = C_k e^{j\theta_k}$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\{a_k e^{jk\Omega_0 t}\} = \ x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} C_k cos\{k\Omega_0 t + \theta_k\} \qquad (4.30)$$

Eşitlik 4.30, gerçel, sürekli zaman, periyodik sinyallerin Fourier serisi gösterimi için yaygın olarak kullanılan bir biçimdir. Bir diğer biçim şüphesiz a_k katsayılarının kutupsal değil, Kartezyen koordinatlarda ifade edilmesi durumunda elde edilir.

$$a_k \ = A_k + jB_k$$

$$a_k = FS\{x(t)\} = FS\{x_{even}(t) + x_{odd}(t)\}$$

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} A_k cos\{k\Omega_0 t\} - B_k sin\{k\Omega_0 t\}$$

(4.31)

Eşitlik 4.31 incelemeye son noktayı koyar. Herhangi bir gerçel, periyodik, sürekli zaman sinyalini tek (sinüs) ve çift (kosinüs) fonksiyonların toplamı olarak ifade edebiliriz.

4.4.4 Zamanda kayma (Time shifting)

Zamanda t_0 kadar kaymış $x(t)$ sürekli zaman periyodik sinyalinin periyodu olan T değişmez. $y(t) = x(t - t_0)$ olarak ifade edildiğinde,

$$b_k = FS\{y(t)\}$$

$$b_k = \frac{1}{T}\int_T x(t - t_0)e^{-jk\Omega_0 t}\, dt$$

$$y(t) = x(t - t_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \quad e^{jk\Omega_0 t} e^{-jk\Omega_0 t_0}$$

$$b_k = a_k e^{-jk\Omega_0 t_0} \qquad (4.32)$$

elde ederiz. Zamanda t_0 kadar kaymanın FS katsayılarını ne şekilde etkilediğini yazılı olarak ifade etme görevi Size bırakılmıştır.

4.4.5 Parseval Teoremi

Periyodik, sürekli zaman sinyalleri için (periyodik olmaları nedeniyle sonsuz enerjiye sahip olduklarından) enerjiden bahsedemesek bile ortalama güç değerinden bahsedebiliriz. Eşitlik 4.33 periyodik, sürekli zaman sinyalleri için ortalama güç ifadesini vermektedir.

$$P_{x(t)} = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\, dt \qquad (4.33)$$

$$|x|^2 = x\,x^* \qquad (4.34.a)$$

olarak verilebileceğinden, Eşitlik 4.34.a denkleminde $x^*(t)$ yerine Fourier serisi açılımı yazılır ise;

$$P_{x(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^*\, e^{-jk\Omega_0 t} dt \qquad (4.34.b)$$

$$P_{x(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* \left\{\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{-jk\Omega_0 t} dt\right\} \qquad (4.34.c)$$

$$P_{x(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^*\, a_k \qquad (4.34.d)$$

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \qquad (4.35)$$

Eşitlik 4.35 ile verilen Parseval teoremi ya da Parseval ilişkisi periyodik bir sinyalin ortalama gücü ile bu sinyali oluşturan harmonik bileşenlerine ait güçlerin toplamının birbirine eşit olduğunu ifade etmektedir.

4.5. Bir bakışta Fourier serisi özellikleri

Sürekli zaman, periyodik sinyallere ait Fourier serisi özellikleri aşağıda listelenmiştir.

Tablo 4.1 Bir bakışta Fourier serisi özellikleri

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \quad e^{jk\Omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt \ , \quad T = \frac{2\pi}{\Omega_0} \quad T \text{ temel period olmak üzere}$$

Özellik	Sinyal	Fourier serisi katsayıları
Tanım	$x(t)$ $y(t)$	a_k b_k
Doğrusallık	$S_1 x(t) + S_2 y(t)$	$S_1 a_k + S_2 b_k$
Time Reversal (Zamanda tersine çevirme)	$x(-t)$	a_{-k}
Eşlenik (Complex conjugate)	$x^*(t)$	a_{-k}^*
Zamanda kayma (Time shifting)	$x(t - t_0)$	$a_k e^{-jk\Omega_0 t_0}$
Gerçel ve çift sinyaller	$x(t)$ Gerçel ve çift	a_k Gerçel ve çift
Gerçel ve tek sinyaller	$x(t)$ Gerçel ve tek	a_k Sadece sanal ve tek

Gerçel sinyalin çift kısmı	$x_{çift}(t)$	$Re(a_k)$
Gerçel sinyalin tek kısmı	$x_{tek}(t)$	$j\ Im(a_k)$
Parseval teoremi	$\frac{1}{T}\int_T \|x(t)\|^2\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|a_k\|^2$	

Tablo 4.1'de verilen özelliklerin TAMAMINI kolaylıkla anladığınızı ve her bir satırı gene kolaylıkla ispatlayabileceğinizi biliyoruz.