HAFTA 11:

ÖRNEKLEME TEOREMİ

SAMPLING THEOREM

İçindekiler

6.1 Bant sınırlı sürekli zaman sinyallerinin örneklenmesi 2

6.2 Düzgün (uniform), periyodik örnekleme 3

6.3 Bant sınırlı sürekli bir zaman sinyaline ait örnekleme işleminin frekans bölgesinde gösterimi 4

6.4 Lakap, Aliasing 6

6.5 Bant geçiren sürekli zaman sinyallerine ait örnekleme teoremi 7

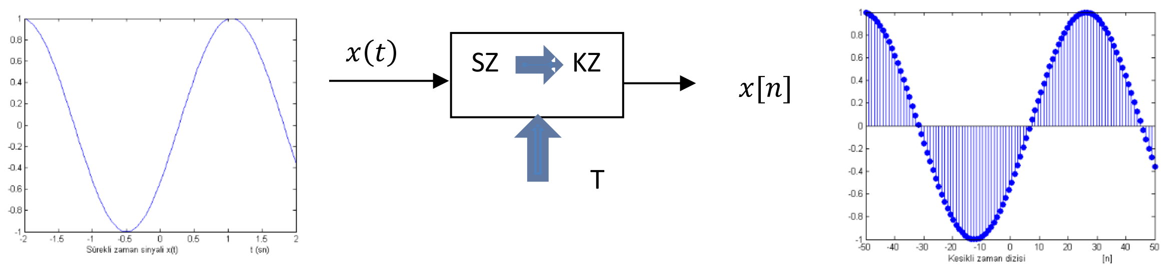
BÖLÜM 6: ÖRNEKLEME TEOREMİ - SAMPLING THEOREM

Sürekli zaman sinyallerinden kesikli zaman sinyallerine (analog sinyallerden sayısal sinyallere) geçişin anlaşılması için elzem olan örnekleme teoremi; sınırlı bir bant genişliğine sahip sürekli zaman sinyallerinden "yeterince" çok örnek alınması durumunda bu örneklerden "kayıpsız" bir biçimde sürekli zaman sinyaline geri dönülebilmesini ifade eder. Bu durum her ne kadar analog sistem tasarımı yerine tasarlanması daha kolay ve "uygun" olan sayısal sistemlerin tercih edilmesi ile yakından ilişkili olsa da bu bölüm içerisinde sürekli zaman sinyallerinin (belli ve sınırlı bir bant genişliğine sahip) kesikli zaman örneklerinin bulunmasına ait kuramsal alt yapı ile sınırlı kalacaktır.

Bu bölüm içerisinde; sürekli zaman sinyalinden kesikli zaman sinyalinin örneklerinin bulunmasını anlatan örnekleme teoremi – sampling theorem, Nyquist ya da Shannon teoreminden kaynaklanmaktadır. Bu nedenle bu bölüm boyunca Nyquist, Shannon ve Örnekleme/Sampling teoremi bir birleri yerine kullanılabilir. Ayrıca bölüm boyunca dikkat edilmesi gereken bir diğer husus bu bölüm içinde sayısal (digital) sinyal işleme ve/veya kesikli zaman sinyal işleme (discrete-time signal processing) konularını esas alan A/D (analog to digital conversion) çevrim uygulamalarının bizzat kendisinin değil; bu uygulamaların kavranmasını kolaylaştıran kuramsal alt yapının sağlanmasının hedeflenmesidir. Bu nedenle bu bölüm kapsamında fiziksel bir elektrik-elektronik mühendisliği uygulaması ya da devre bileşeni değil, bölüm adında açıkça yer aldığı üzere örnekleme teorisinin anlaşılması hedeflenmelidir. Bu kuramsal alt yapı son derece kolay ve hızlı bir biçimde kendini (A/D ve D/A) çevrimlerinde gösterecektir.

6.1 Bant sınırlı sürekli zaman sinyallerinin örneklenmesi

Şekil 6.1'de sürekli zaman sinyallerinin kesikli zaman sinyallerine dönüştürülmesini ifade eden blok diyagram yer almaktadır. Bölümün ilerleyen kısımlarında sürekli zaman sinyalinin neden sınırlı bir bant genişliğine sahip olması gerektiği anlaşılacaktır.



Şekil 6.1 Sürekli Zaman (SZ) kesikli zaman (KZ) dönüşümüne ait blok diyagramı.

Örnekleme teoreminin amacı; sürekli bir $x(t)$ zaman sinyalinden (periyodik olmak zorunda değil) düzenli ve T periyodunda örnekler alarak $x[n], n \in$ Z kesikli zaman sinyaline (dizisine) ulaşmaktır. Bunu yapmanın en dolambaçsız yolu $x[n] = x(t\ )|t =_{nT}$ anlarında elde edilecek $x[n] = x(nT)$ dizisidir. Böylece T zaman aralıkları boyunca sürekli zaman sinyalinden örnekler alınarak kesikli zaman sinyali oluşturulmuş olacaktır.

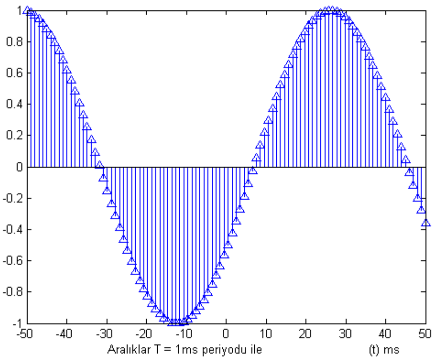
6.2 Düzgün (uniform), periyodik örnekleme

Sürekli bir zaman sinyalinden kesikli bir zaman sinyaline ulaşmanın matematiksel yöntemi en kolay anlaşılır bir biçimde (Oppenheim,1999) tarafından gösterilmiştir. Burada aralıkları eşit (dolayısı ile düzgün ve periyodik) bir darbe katarı ile örneklenmesi istenen sürekli zaman sinyali zaman bölgesinde çarpılmaktadır. Eşitlik 6.1'de verilen *d(t)* darbe katarı, $-\infty < n < \infty \; n \in \mathrm{Z}$ aralığında $x(t)$ sinyali ile çarpılmak sureti ile örneklenmiş zaman sinyali $x_{ö}(t)$ eşitlik 6.2'de elde edilir.

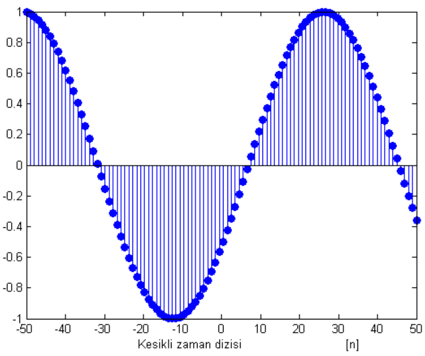
$$d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[t - nT] \quad \text{Eşitlik 6.1}$$

$$x_{ö}(t) = x(t)d(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[t - nT] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta[t - nT] \quad \text{Eşitlik 6.2}$$

Şekil 6.2'de dürtü katarı ile çarpılmış sinüzoidal dalga şekline sahip bir sürekli zaman sinyalinin örneklenmiş hali görülmektedir. Eğer bu sinyal zaman bilgisi içermeyecek şekilde kesikli zaman sinyaline çevrilir ise Şekil 6.3'de sunulan kesikli zaman sinyali elde edilir.



Şekil 6.2 Dürtü katarı ile çarpılmış sinüzoidal dalga şekline sahip bir sürekli zaman sinyalinin örneklenmiş hali, $x_{ö}(t)$



Şekil 6.3 Kesikli zaman sinyaline geçiş, x[n]

Örnekleme işlemi sırasında dikkat edilmesi gereken husus, zaman sinyaline ait iki örnek arasındaki sürenin eşit (uniform) ve periyodik olarak T kadar olmasıdır. T örnekleme periyodu ile örnekleme frekansı arasındaki ilişki her zaman olduğu gibi $f_{ö} = \frac{1}{T}$ olarak hesaplanmakta olup, örneklenen sinyalin periyodik olması durumunda temel periyot ile karıştırılmamalıdır.

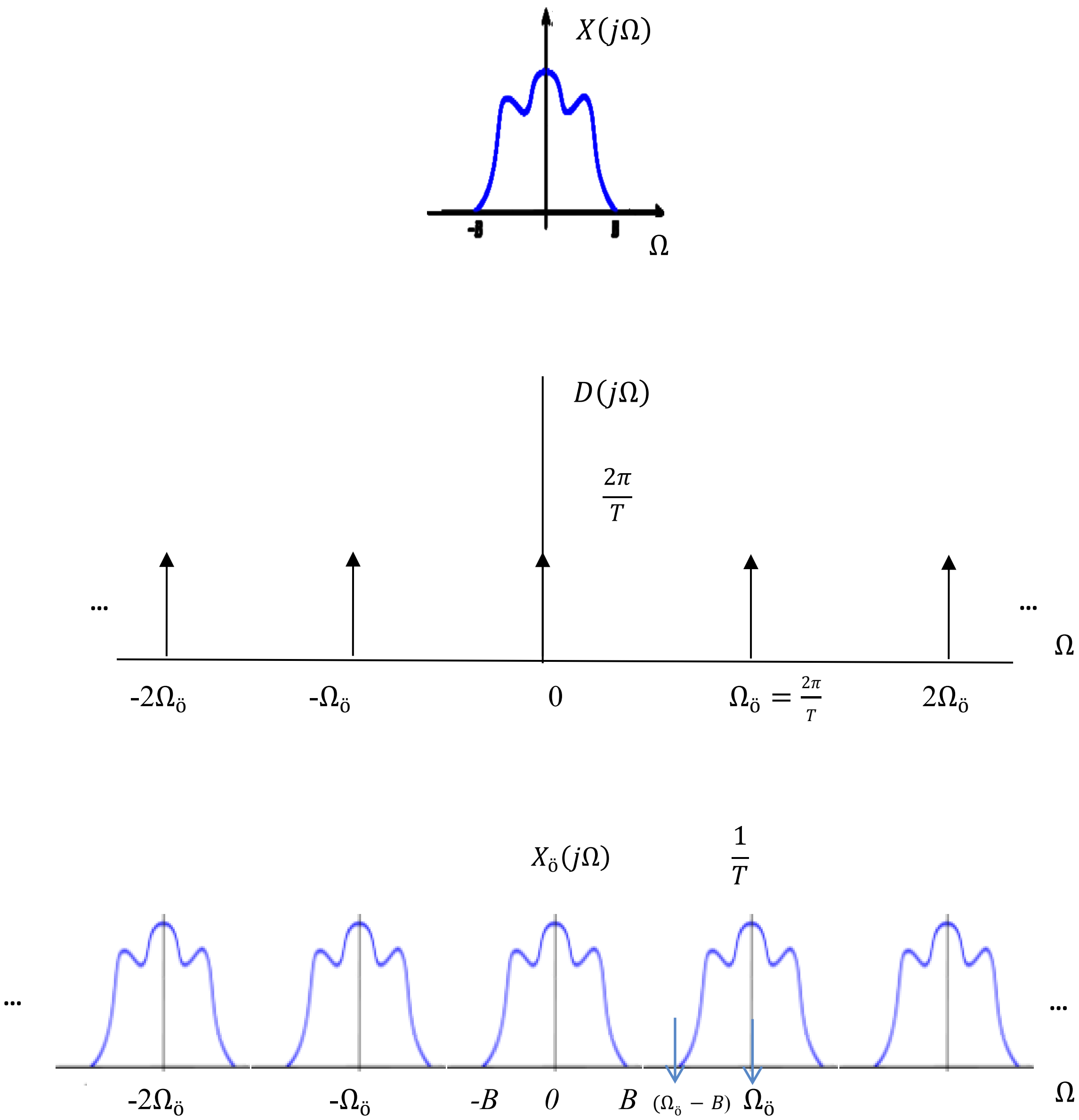
Örnekleme teoremi denildiğinde ilk akla gelen Nyquist/Shannon frekansı ve buna bağlı ortaya çıkan Nyquist/Shannon oranının anlaşılabilmesi için örnekleme teoreminin frekans bölgesinde incelenmesi gerekir. Tarihsel olarak ilk önce 1928 yılında Harry Nyquist tarafından ima edilen örnekleme teoremini 1949 yılında Shannon formülüze etmiştir. Literatürde örnekleme teoreminin birçok farklı varyasyonu birçok farklı bilim insanı tarafından incelenmiş olup bu bilim adamlarından öne çıkan Nyquist/Shannon frekansı ve Nyquist/Shannon oranını anlamak için örnekleme teoremini frekans bölgesinde incelemek faydalı olacaktır.

6.3 Bant sınırlı sürekli bir zaman sinyaline ait örnekleme işleminin frekans bölgesinde gösterimi

Şekil 6.4'de örnekleme teoreminin etkisi frekans bölgesinde gösterilmiştir. $\boldsymbol{X(j\Omega)}$, örneklenmesi istenen bant sınırlı x(t) sürekli zaman sinyalinin Fourier Dönüşümü alındıktan sonra ortaya çıkan temsili frekans bölgesi gösterimi, $\boldsymbol{D(j\Omega)}$, örnekleme işlemini gerçekleştiren zaman bölgesi darbe katarının gerçek frekans bölgesi gösterimi, $\boldsymbol{X_{ö}(j\Omega)}$ ise örneklenmiş sinyalin frekans bölgesi gösterimine aittir. Zaman bölgesindeki çarpma işleminin frekans bölgesinde katlama işlemine karşılık geldiğini bildiğimize göre herhangi bir sürekli zaman sinyalinin frekans bölgesindeki spektrumunu (izgesini), zaman bölgesindeki darbe katarının sürekli zaman Fourier dönüşümü olan darbe katarı (Bölüm 5.3 Sürekli zaman periyodik ve sürekli zaman aperiyodik sinyallerin Fourier dönüşümüne güzel bir örnek) ile katlanması sonucunda (Bölüm 3.4.2.1 Dağılma özelliği kullanarak karmaşık bir katlama işleminin basit hale indirgenmesine örnek) Şekil 6.4'de verilen $\boldsymbol{X_{ö}(j\Omega)}$ izgesini elde ederiz. Daha önceki bölümlerde elde ettiğimiz bilgi birikiminin sinyal işleme kavrayışımızı ne denli arttırdığına ayrıca dikkatinizi çekmek isterim.

Şekil 6.4'de sunulan izgenin elde edilebilmesi için $\boldsymbol{\Omega_{ö} = 2\pi f_{ö} = \frac{2\pi}{T}}$ açısal örnekleme frekansı ve B örneklenmek istenen sinyalin maksimum frekans bileşeni (bant sınırı) olmak üzere $\boldsymbol{\Omega_{ö} - B > B}$ olması gerektiği açıktır. Aksi takdirde $\boldsymbol{\Omega_{ö} - B}$ bandının hemen üzerindeki frekans bileşenlerinin B bandının hemen altındaki frekans bileşenlerinin üzerini örteceği basit bir çizimle gösterilebilir. Bu girişimin $\boldsymbol{X(j\Omega)}$ izgesini bozacağı, kesim frekansı B bant sınırının hemen üstüne ya da $\boldsymbol{\frac{\Omega_{ö}}{2}}$ frekansının hemen altına konulacak bir alçak geçiren filtre ile orijinal $\boldsymbol{X(j\Omega)}$ izgesinin tekrar elde edilemeyeceği açıktır. Bu durumda Nyquist oranı (Nyquist rate) olarak adlandırılan "örnekleme frekansı – sampling frequency" değerine eşitlik 6.3 sayesinde ulaşılır. B frekansı (örneklenmek istenen sinyalin maksimum frekans bileşeni, bant sınırı) ise Nyquist frekansı olarak adlandırılır. Şekil 6.4'den açıkça görüleceği üzere Eşitlik 6.3'de büyük "eşitlik" olması durumunda $\boldsymbol{X(j\Omega)}$ orijinal izgesini bozmadan geri dönebilmek için ideal bir alçak geçirgen filtreye ihtiyaç duyulacaktır.

$$\boldsymbol{\Omega_{ö} - B > B, \quad \Omega_{ö} > 2B} \qquad \text{Eşitlik 6.3}$$



Şekil 6.4 Frekans bölgesinde örnekleme teoreminin gösterilmesi: $X(j\Omega)$, örneklenmesi istenen x(t) sürekli zaman sinyalinin temsili frekans bölgesi gösterimi, $D(j\Omega)$, örnekleme işlemini gerçekleştiren zaman bölgesi darbe katarının hesaplanan frekans bölgesi gösterimi, $X_ö(j\Omega)$ ise bu iki sinyalin katlanması (convolution) sonucu elde edilen örneklenmiş sinyalin frekans bölgesi gösterimi

Her zaman olduğu gibi kavrayışımızı pekiştirmek, konuyu içselleştirebilmek maksadıyla örnekleme teoremi, son olarak frekans bölgesi gösteriminin matematiksel ifadesi eşitlik 6.4'de verilmiştir.

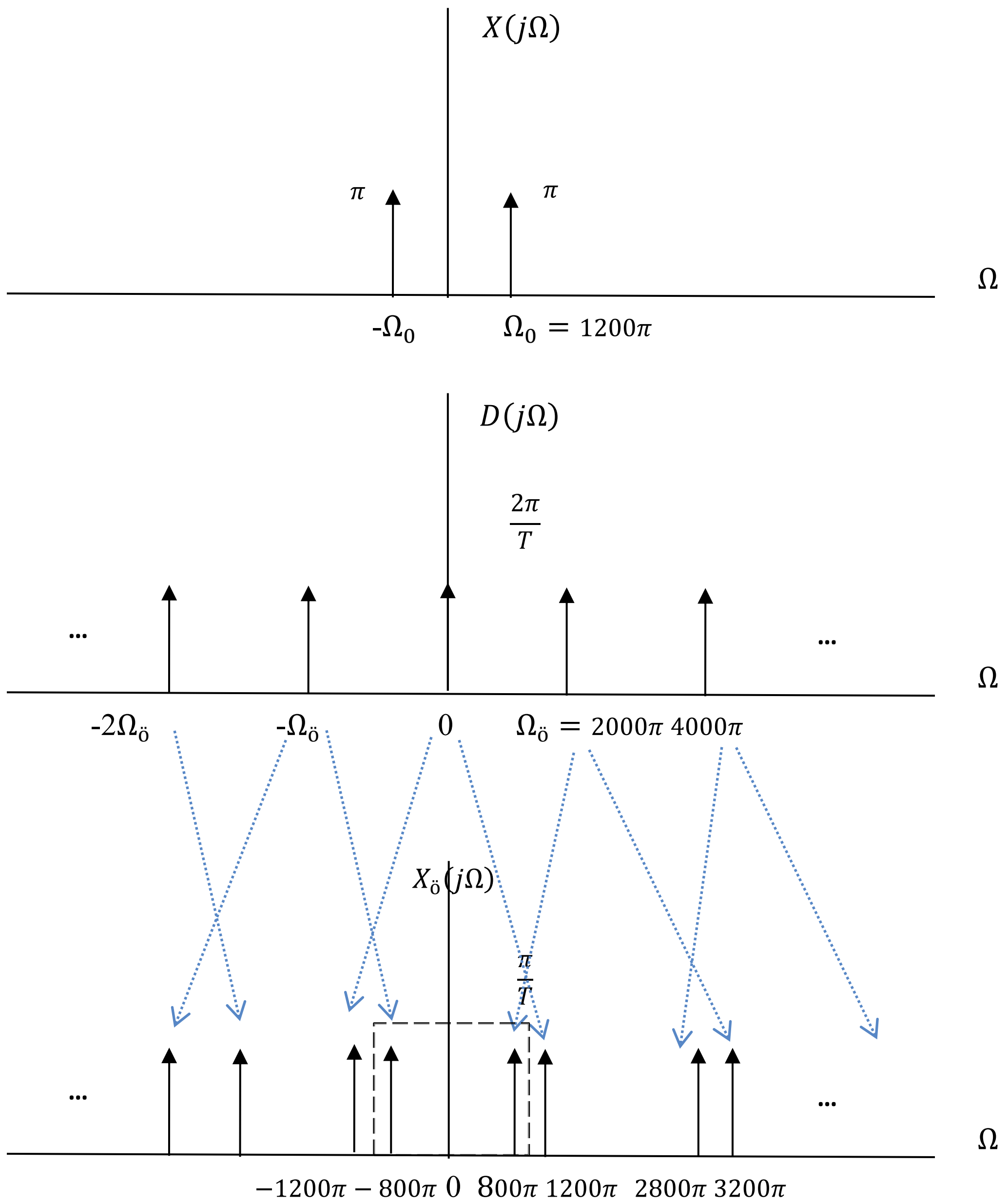
$$x_ö(t) = x(t)d(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[t-nT] = \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta[t-nT]$$

$$X_ö(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}X(j\Omega) * D(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(j(\Omega - k\Omega_ö)) \qquad \text{Eşitlik 6.4}$$

6.4 Lakap, Aliasing

Örnekleme frekansı – sampling frequency eşitlik 6.3 gereğince hesaplanmadığında ya da örnekleme frekansı önceden belirlendiğinde örneklenmek istenen sürekli zaman sinyalinin maksimum frekans değerinin, bant sınırı B, eşitlik 6.3 Nyquist frekansından yüksek olması durumunda örnekleme işleminde bozucu bir etki, aliasing görülür. Bu durumda Şekil 6.4'de sunulan $X_ö(j\Omega)$ harmoniklerinin iç içe geçerek $\boldsymbol{X(j\Omega)}$ orijinal izgesinde örtücü bir etki yaratacağı görülebilir. Bu durum aliasing (bozucu etki, örtüşme) olarak adlandırılmakla birlikte aslında orijinal sinyalin bozulmasından çok daha ciddi bir sonuca neden olabilir. Bu durum Örnek 6.4'de sunulmuştur.

Örnek 6.4: $x(t) = \cos(2\pi 600t)$ olarak verilsin. Bu sinyalin örnekleme teoremine göre en az T=1/1200 sn, $\boldsymbol{\Omega_ö = 2\pi 1200 = 2400\pi \frac{radyan}{sn}}$ $\boldsymbol{veya\ f_ö} = 1200\ \text{Hz}$ ile örneklenmesi gerekir. Ancak, örnekleme periyodu olarak T=1/1000 alınır ve örnekleme frekansının tam yarısına ideal bir alçak geçirgen filtre konulur ise elde edilecek sürekli zaman sinyali ne olur?



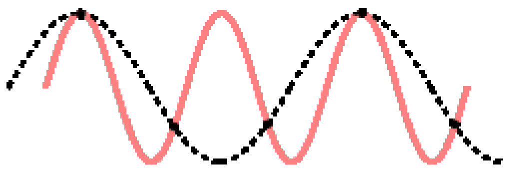
Şekil 6.5. Aliasing etkisi

Örnekleme frekansının, örneklenmek istenen sinyalin maksimum frekans bileşeninden (Örnek 6.4 için sadece tek bir frekans olup, 600 Hz olarak verilmiştir) $\boldsymbol{\Omega}_{\ddot{o}} - \boldsymbol{B}$ bandının hemen üzerindeki $(2000\pi - 1200\pi = 800\pi)$ frekans bileşenlerinin B bandının hemen altındaki frekans bileşenlerinin üzerini örttüğü açıkça görülmektedir. Bu durumda örnekleme frekansı olan 1,000 Hz yetersiz kalıp, örnekleme frekansının tam yarısına konulan (500 Hz= $1000\pi\ rad/sn$) ideal alçak geçirgen filtrenin çıkışında $x'(t)$ sinyalinin elde edileceği açıktır.

$x'(t) = \cos(2\pi 400t) \neq x(t) = \cos(2\pi 600t)$

Sonuç olarak 600 Hz frekansında verdiğimiz kosinüs sinyalimiz 400 Hz frekansında bir diğer kosinüs olarak bize geri dönmüştür. Bu durum kesinlikle bir "bozucu etki", "örtüşme", "aliasing" ama belki daha da önemlisi beklenmedik bir sinyal değişikliğinden dolayı bir isim değişikliği, rumuz, lakap olarak bize geri dönmektedir. Üstelik örnekleme frekansı doğru seçilmediğinde orijinal sinyali geri elde etmek için konulacak alçak geçirgen filtrenin kesim frekansının yükseltilmesinin de hiçbir işe yaramayacağı açıktır. Örneğin kesim frekansının 1000 Hz olması durumunda elde edilecek sinyal

$x''(t) = \cos(2\pi 400t) + \cos(2\pi 600t) \neq x(t) = \cos(2\pi 600t)$ olarak hesaplanacaktır. Şekil 6.6'da zaman bölgesinde yeterince örnek alınmaması durumunda elde edilebilecek aliasing effect "lakap" etkisi sunulmuştur.



Şekil 6.6 Sürekli zaman sinyali ve yeterince örnek alınmaması durumunda örneklerden geri çatılacak sinyal kesikli çizgiler ile gösterilmiştir.

6.5 Bant geçiren sürekli zaman sinyallerine ait örnekleme teoremi

Son olarak önemli olduğu düşünülen bir husus: Belli bir bant aralığı olan ancak alçak geçiren (low pass) bir sinyal olmadığı için $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{min}} \neq \mathbf{0}$ olan bant geçiren sinyaller için örnekleme teoremi Eşitlik 6.5 ile verilir.

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{max}} - \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{min}}, \quad \boldsymbol{\Omega}_{\ddot{o}} > 2\boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{\Omega}_{\ddot{o}} > 2(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{max}} - \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{min}}) \qquad \text{Eşitlik 6.5}$$

$\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{min}} = \mathbf{0}$ olması durumunda Eşitlik 6.5, Eşitlik 6.3'e indirgendiğinden örnekleme teoremini Eşitlik 6.5 ile verilen genel hali ile bilmek daha uygun olacaktır.