CAUCHY-GOURSAT TEOREMİ

f(z) fonksiyonu kontur içerisindeki tüm noktalarda analitikse, kapalı bir C konturu üzerinden integral sıfıra eşittir.

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

Teorem:

C_k saat yönünde dolanıma sahip basit kapalı bir kontur olsun. C_k, $k = 1,2,\ldots n$ C'nin içinde tanımlı, saat yönünde dolanımı olan, birbirinden ayrık, ortak noktaları olmayan basit kapalı konturlar olsun. f(z) fonksiyonu, C konturu içindeki tüm noktalarda ve C_k konturlarının dışında analitikse ve o zaman

$$\int_C f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{n} \int_C f(z)\,dz = 0$$

CAUCHY İNTEGRAL FORMÜLÜ

Teorem: f(z) fonksiyonu basit, kapalı bir C konturu üzerinde ve içinde her noktada analitik olsun. z_0, C içinde her hangi bir nokta ise, o zaman

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \boldsymbol{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

ifadesine Cauchy integral formülü denir.

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \quad = 2\pi \boldsymbol{i}\, f(z_0)$$

SERİLER

Teorem:

$z_n = x_n + iy_n \quad n = 1,2,\ldots \quad z = x + iy$ ise

O zaman

$\lim_{n\to\infty} z_n = z$ ancak ve ancak

$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y$

Kuvvet Serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_o + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + .. \; a_n (z - z_0)^n$$

Taylor Serisi

f(z) fonksiyonu, z_0 merkezli, R yarıçaplı $|z - z_0| < R_0$ diski boyunca analitik olsun. f(z) fonksiyonu aşağıdaki şekilde bir kuvvet serisine sahiptir.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad |z - z_0| < R_0$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad n = 0,1,2, \ldots ..$$

Yani, z serisi belirtilen açık diskin içinde olduğu zaman f(z) fonksiyonuna yakınsar.

Maclaurin Serisi

f(z) fonksiyonu, $z_0 = 0$ merkezli, R yarıçaplı $|z| < R_0$ diski boyunca analitik olsun. f(z) fonksiyonu aşağıdaki şekilde bir seriye sahiptir.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z)^n \qquad (|z| < R_0)$$

Laurent Serisi

f(z) fonksiyonu, z_0 merkezli, $\mathrm{R}_1 < |\mathrm{z}| < \mathrm{R}_2$ bölgesi boyunca analitik olsun. C konturu z_0 civarında, pozitif yönde dolanıma sahip basit kapalı bir kontur olsun. f(z) fonksiyonu tanımlı bölge içinde her bir noktada aşağıdaki şekilde bir seriye sahiptir.

$$\mathrm{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

$$(\mathrm{R}_1 < |\mathrm{z} - \mathrm{z}_0| < \mathrm{R}_2)$$

$$\mathrm{a_n} = \frac{1}{2\pi \boldsymbol{i}} \oint_C \frac{\mathrm{f(z)}\, dz}{(\mathrm{z} - z_0)^{n+1}} \qquad n = 0,1,2..$$

$$b_{\mathrm{n}} = \frac{1}{2\pi \boldsymbol{i}} \oint_C \frac{\mathrm{f(z)}\, dz}{(\mathrm{z} - z_0)^{-n+1}} \qquad n = 1,2..$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, (z - z_0)^n$$

$$(R_1 < |z - z_0| < R_2)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi \boldsymbol{i}} \oint_C \frac{f(z)\, dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

$$n = 0, \mp 1, \mp 2, ..$$

KAYNAKLAR

- Complex Variables and Applications, J.W. Brown and R.V. Churchill, 1990.

- Kısmi Diferansiyel Denklemler, Schaum's Outlines, P. Duchateu ve D.W. Zachmann, 2000.

- Complex Analysis, Theodore W. Gamelin, 2001.