Rezidü ve Kutup Noktaları

f(z) fonksiyonu z_0 noktasında analitik değilse ancak, z_0 noktası civarındaki tüm noktalarda analitik ise, z_0 noktasına singüler nokta denir. f(z) fonksiyonun analitik olduğu z_0'ın $0 < |z - z_0| < \in$ ihmal edilmiş komşuluğunda, singüler nokta izoledir denir.

- z_0 f(z) fonksiyonunun izole bir singüler noktası olduğu zaman, $0 < |z| < R_2$ bölgesinde, her bir z noktasında f(z) fonksiyonu analitik olacak şekilde pozitif bir R_2 değeri vardır. Öyle ki

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots$$

$$(0 < |z - z_0| < R_2)$$

$n = 1$ için b_n katsayısı aşağıdaki şekilde yazılırsa:

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \mathrm{f(z)\,dz} \;\rightarrow\; \oint_C \mathrm{f(z)\,dz} = 2\pi i b_1$$

$\frac{1}{\mathrm{z-z_0}}$ 'ın katsayısı olan $\mathrm{b_1}$ kompleks sayısı, z_0 izole bir singüler noktasında f(z) fonksiyonunun rezidüsü olarak adlandırılır.

$$\mathrm{b_1} = \underset{\mathrm{z=z_0}}{\mathrm{Rez}}\,\mathrm{f(z)}$$

$$\oint_C \mathrm{f(z)\,dz} = 2\pi i \underset{\mathrm{z=z_0}}{\mathrm{Rez}}\,\mathrm{f(z)}$$

Cauchy Rezidü Teoremi

C kapalı, pozitif yönde dolanımlı, basit bir kontur olsun. f(z) fonksiyonu C içinde bulunan sonlu sayıdaki singüler noktalar dışında, C'nin içinde ve üzerinde her yerde analitik ise o zaman aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Rez}_{z=z_k} f(z)$$

Sonsuzdaki Rezidüler

Teorem: f(z) fonksiyonu pozitif yönde dolanımlı, basit, kapalı bir C konturunun içinde bulunan sonlu sayıdaki singüler noktalar dışında her yerde analitik ise o zaman aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\oint_C \mathrm{f(z)\,dz} = 2\pi i \sum_{z=0}^{n} \underset{\mathrm{z=0}}{\mathrm{Rez}} \left[\frac{1}{\mathrm{z}^2}\,\mathrm{f}\left(\frac{1}{\mathrm{z}}\right)\right]$$

İzole Singüler Noktalar

f(z) fonksiyonu aşağıdaki şekilde bir Laurent serisi şeklinde yazılırsa $\frac{1}{z-z_0}$'ın katsayısı b_1, f(z) fonksiyonunun z_0 noktasındaki prensip kısmı olarak adlandırılır. z_0 izole singüler noktadır.

$$\mathrm{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n + \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(z-z_0)^m}..$$

$$(0 < |\mathrm{z}-\mathrm{z}_0| < \mathrm{R}_2)$$

$b_m \neq 0$ ise, z_0 noktasına m. basamaktan izole singüler nokta denir. $\mathrm{m} = 1$ olduğu durum basit kutup noktasına karşı gelir.

$b_n = 0$ ise o zaman

$$\mathrm{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z - \mathrm{z}_0)^n$$

$$= a_0 + \ a_1(z - z_0) + a_2\,(z - z_0)^2 + ..$$

$$(0 < |\mathrm{z} - \mathrm{z}_0| < \mathrm{R}_2)$$

elde edilir ve z_0 kaldırılabilir singüler nokta olarak adlandırılır. Kaldırılabilir singüler noktadaki rezidü daima sıfırdır.

KAYNAKLAR

- Complex Variables and Applications, J.W. Brown and R.V. Churchill, 1990.
- Kısmi Diferansiyel Denklemler, Schaum's Outlines, P. Duchateu ve D.W. Zachmann, 2000.
- Complex Analysis, Theodore W. Gamelin, 2001.