GGY 112
İSTATİSTİK

Doç. Dr. Furkan BAŞER
Ankara Üniversitesi Uygulamalı Bilimler Fakültesi



5. HAFTA

ÖZEL RASGELE DEĞİŞKENLER



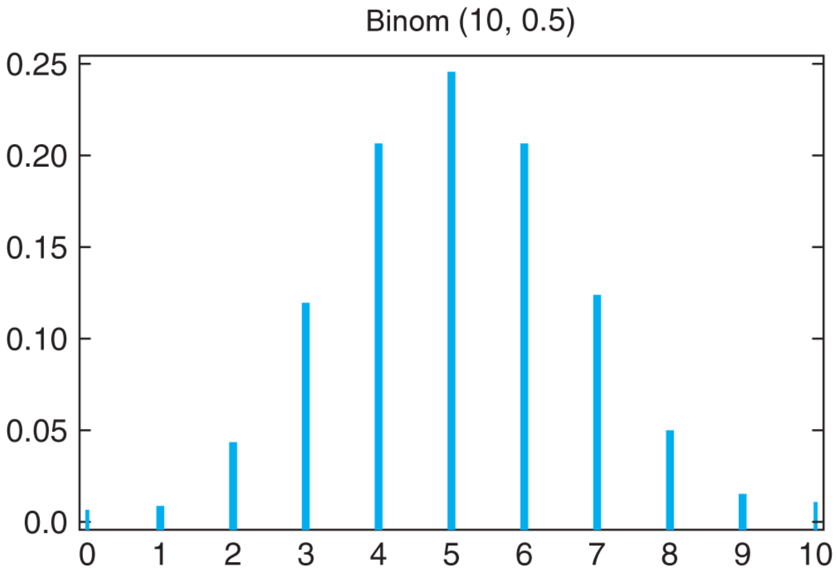
BERNOULLI VE BİNOM RASTGELE DEĞİŞKENLERİ

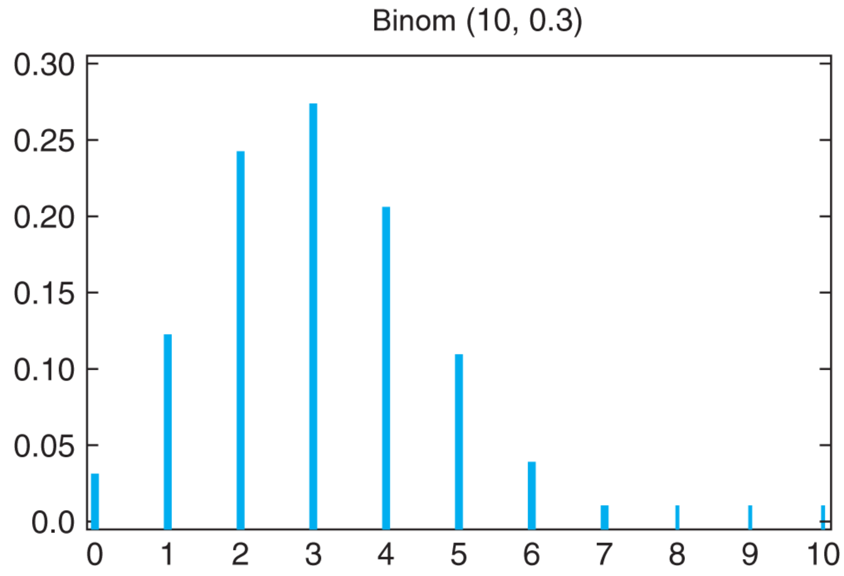
Sonucu ya “başarı” veya “başarısızlık” olarak sınıflanabilen bir denemenin ya da deneyin uygulandığını varsayalım. Sonuç başarılı olduğunda $X = 1$ ve başarısız olduğunda $X = 0$ alırsak bu durumda *X’in* olasılık kitle fonksiyonu, $\mathbf{p}$, $0 \leq \mathbf{p} \leq 1$ denemenin başarılı olma olasılığı olmak üzere

$$P\{X = 0\} = 1 - p$$
$$P\{X = 1\} = p$$

BERNOULLI VE BİNOM RASTGELE DEĞİŞKENLERİ

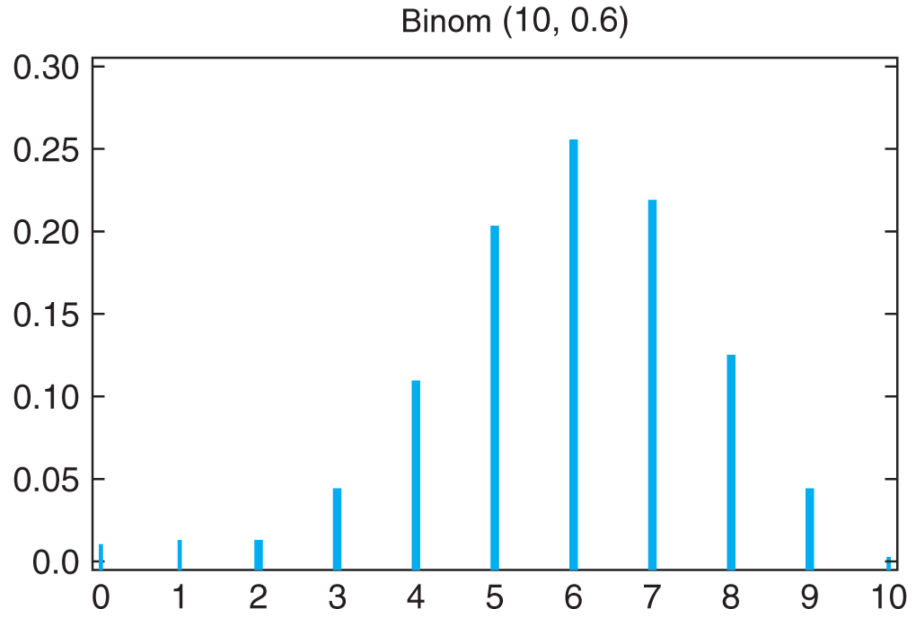
Binom olasılık kitle fonksiyonları



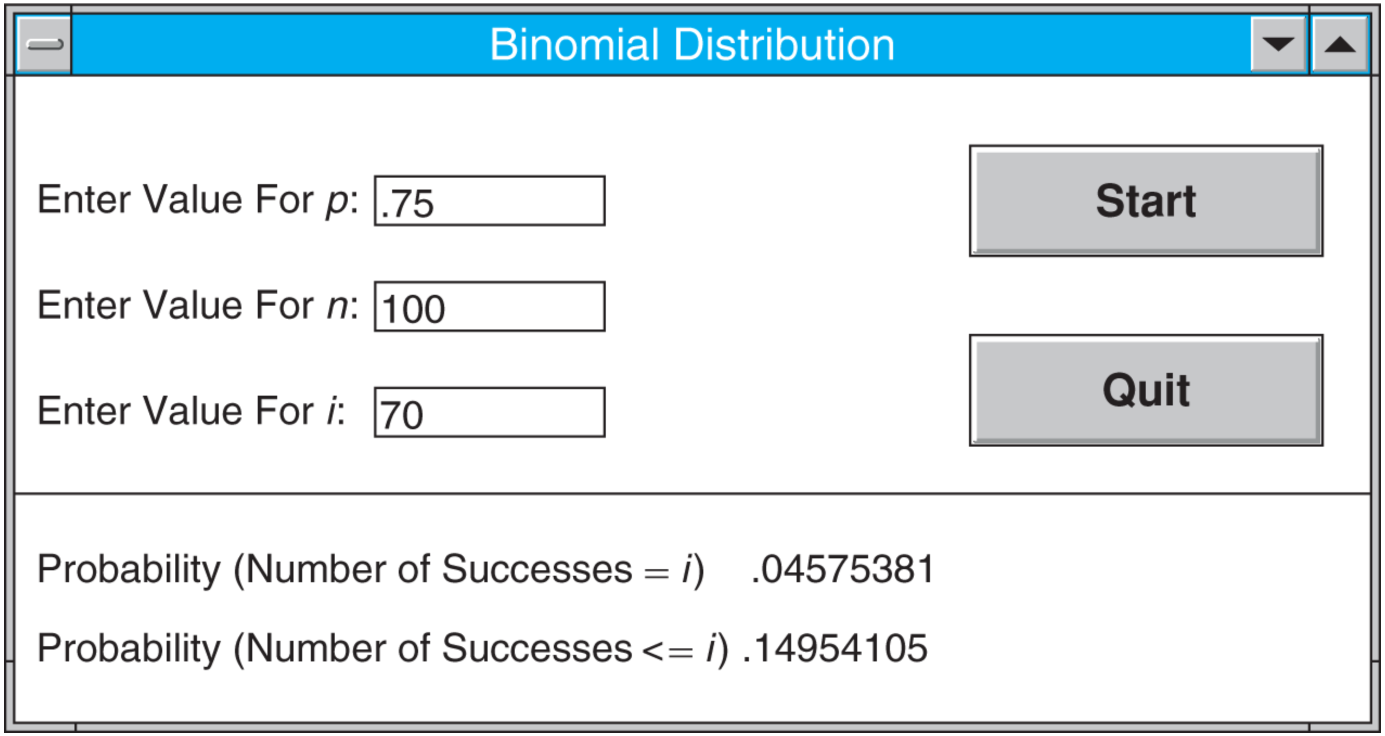


BERNOULLI VE BİNOM RASTGELE DEĞİŞKENLERİ

Binom olasılık kitle fonksiyonları



BERNOULLI VE BİNOM RASTGELE DEĞİŞKENLERİ



POISSON RASTGELE DEĞİŞKENLERİ

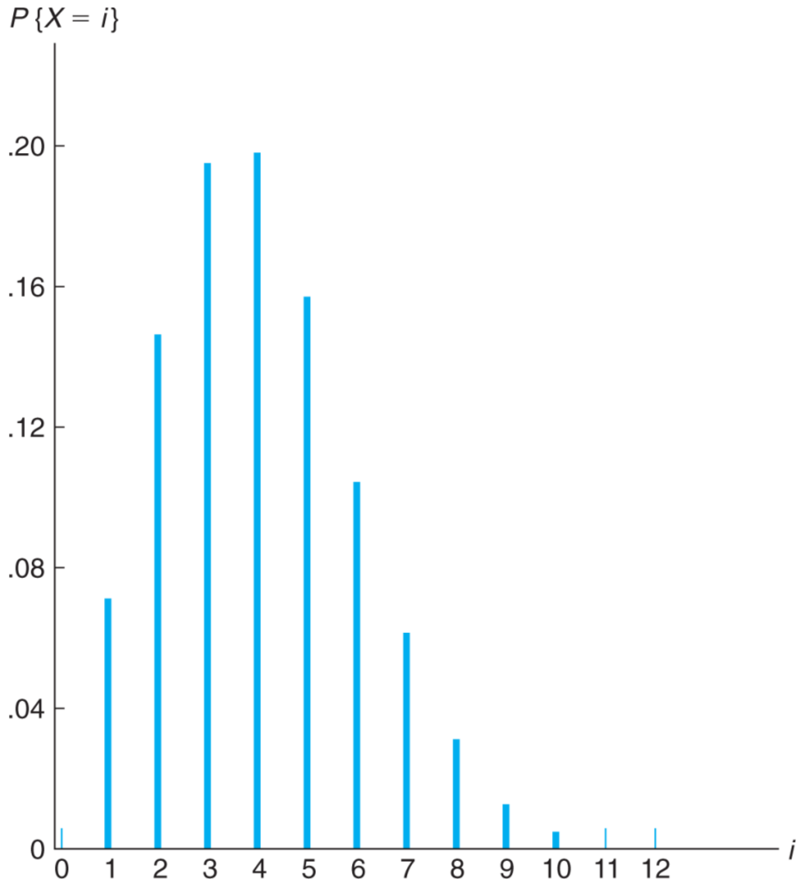
Olasılık kitle fonksiyonu

$$P\{X = i\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}, \qquad i = 0, 1, \ldots$$

ile verilen *0, 1, 2,…* değerlerinden birini alan bir *X* rastgele değişkenine *λ, λ > 0,* parametreli Poisson rastgele değişkeni denir.

POISSON RASTGELE DEĞİŞKENLERİ

λ = 4 olan Poisson olasılık kitle fonksiyonu



HİPERGEOMETRİK RASTGELE DEĞİŞKEN

Bir kutu *N* tanesi kabul edilebilir kalitede ve diğer *M* tanesi kusurlu olan *N + M* tane pil içeriyor. (Yerine konmaksızın) *n* çaplı bir örneğin, *n* çaplı $\binom{N+M}{n}$ Herhangi biri olmada eşit şanslı olma anlamında rastgele seçilmesi gerekiyor. Eğer örnekteki kabul edilebilir pil sayısını *X* ile gösterirsek,

$$P\{X = i\} = \frac{\binom{N}{i}\binom{M}{n-i}}{\binom{N+M}{n}}, \qquad i = 0, 1, \ldots, \min(N, n)^*$$

olur.

DÜZGÜN RASTGELE DEĞİŞKEN

Olasılık yoğunluk fonksiyonu,

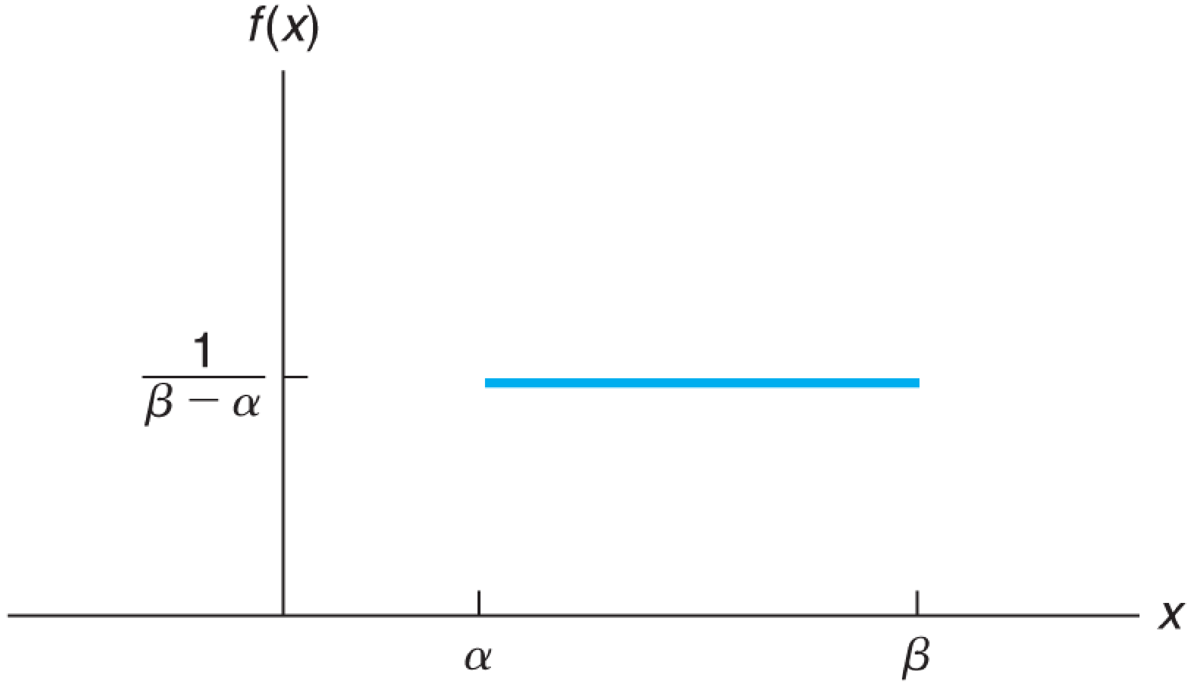
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & \alpha \leq x \leq \beta \quad \text{ise} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile verilen bir X rastgele değişkenine $[\alpha, \beta]$ aralığı üzerinde düzgün dağılmıştır, denir.



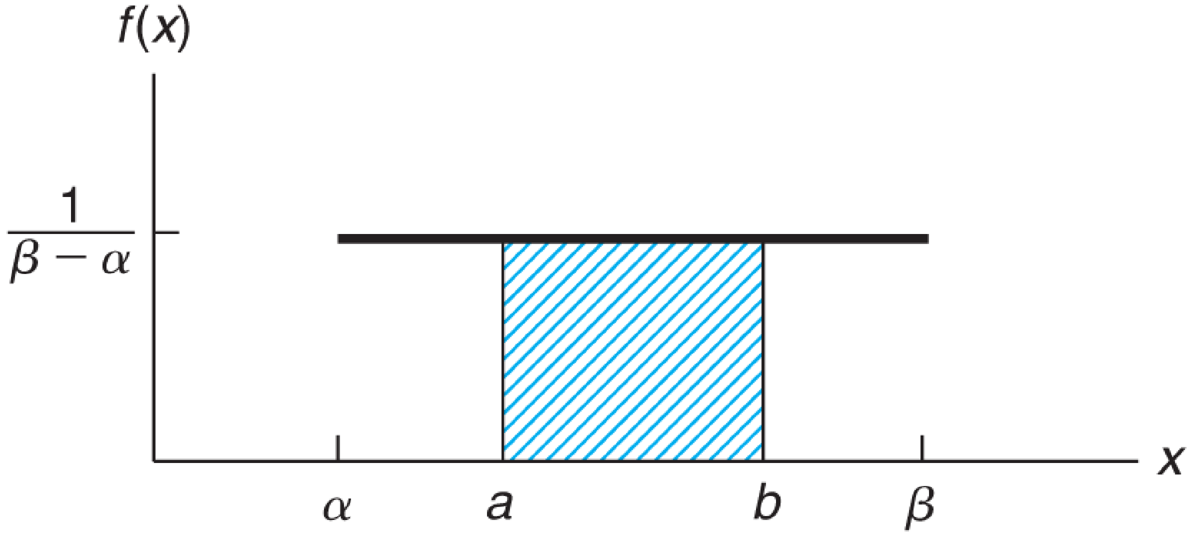
DÜZGÜN RASTGELE DEĞİŞKEN

Düzgün $[\alpha, \beta]$ *için f (x) in grafiği*



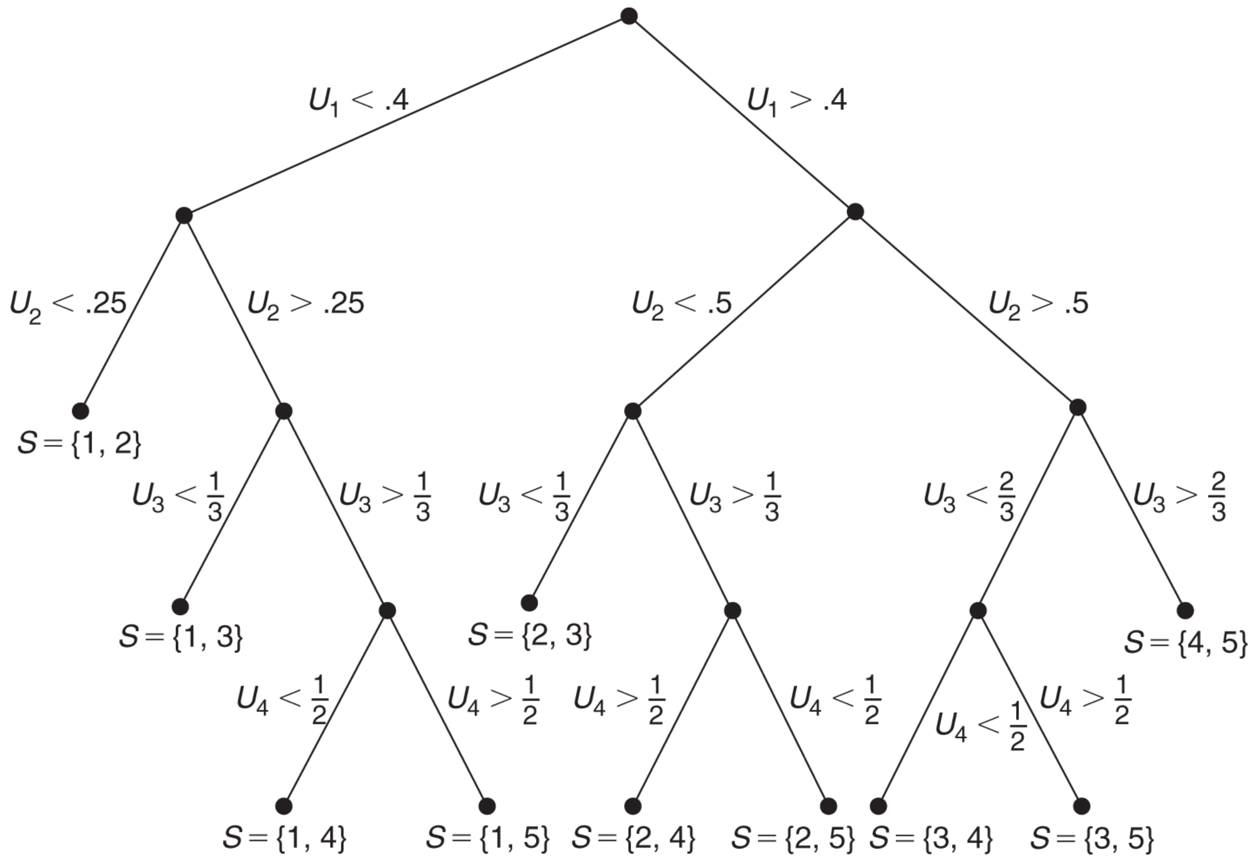
DÜZGÜN RASTGELE DEĞİŞKEN

Düzgün bir rastgele değişkenin olasılıkları

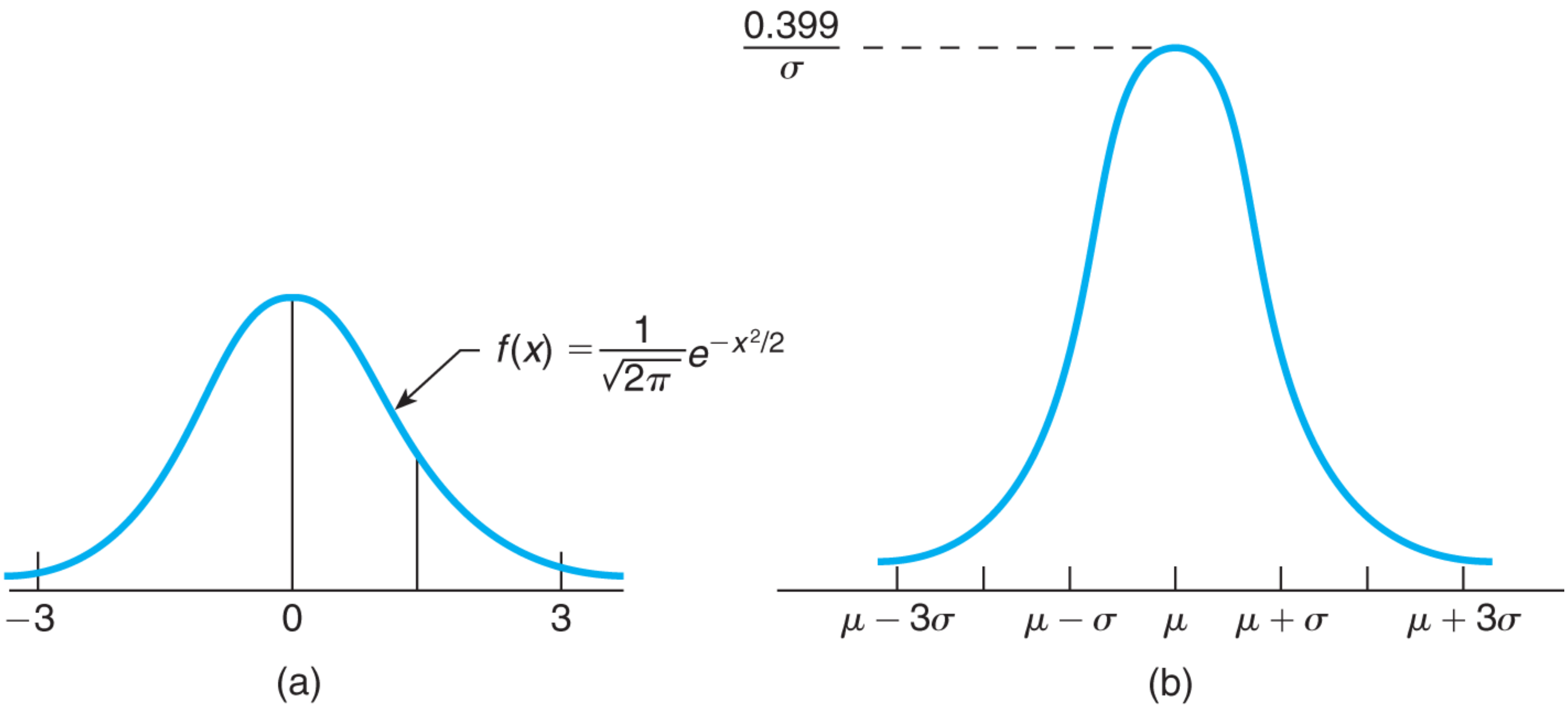


DÜZGÜN RASTGELE DEĞİŞKEN

Ağaç diyagramı



DÜZGÜN RASTGELE DEĞİŞKEN



(a) $\mu = 0, \sigma = 1$ ve (b) keyfi μ ve σ^2 değerleri için normal yoğunluk fonksiyonu.

NORMAL RASTGELE DEĞİŞKENLER

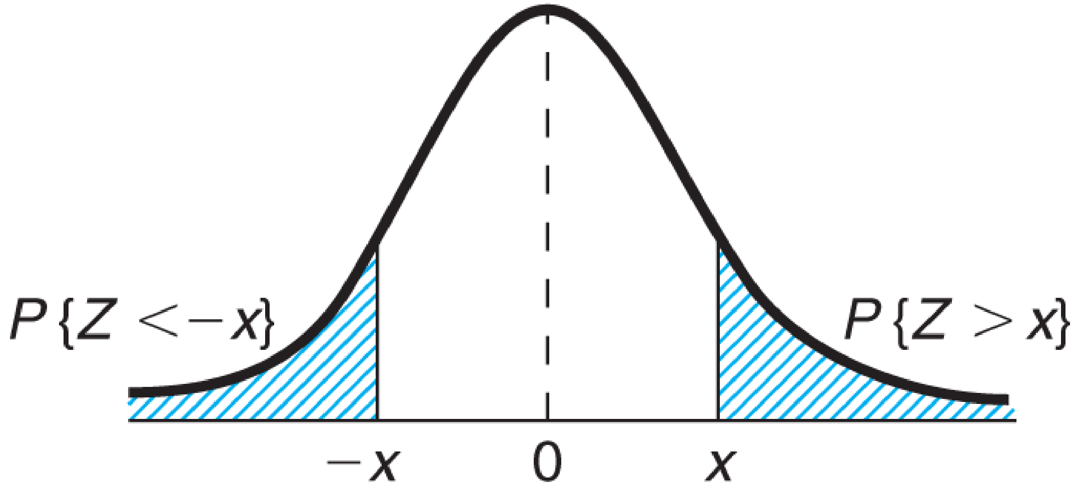
Olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \qquad -\infty < x < \infty^*$$

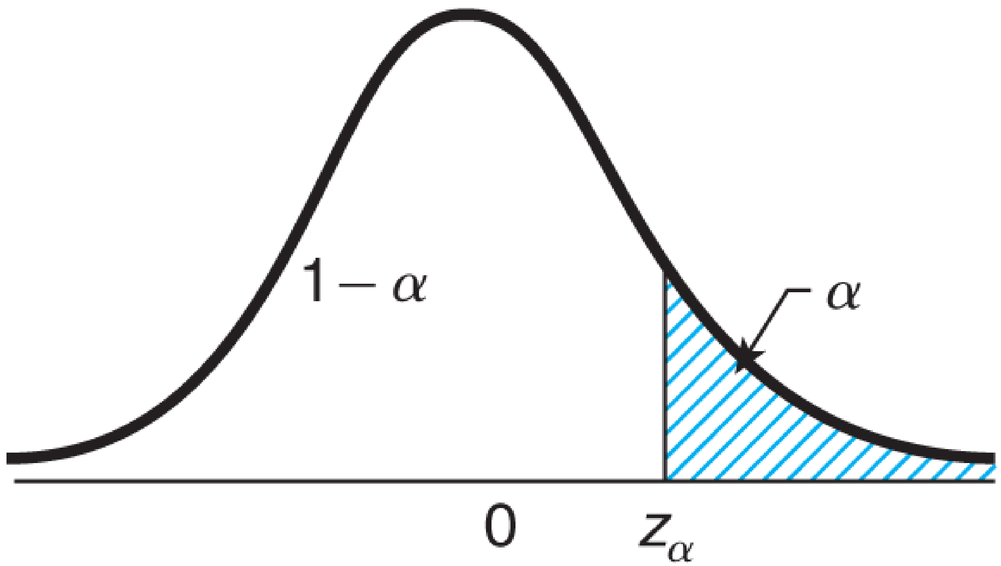
Biçimindeyse, bir X rastgele değişkenine μ ve σ^2 parametrelerine ile normal dağılmıştır, denir ve $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ biçiminde yazılır.

NORMAL RASTGELE DEĞİŞKENLER

Standart normal olasılıklar



NORMAL RASTGELE DEĞİŞKENLER



$$P\{Z > z_\alpha\} = \alpha.$$

ÜSTEL RASTGELE DEĞİŞKENLER

Bir $\lambda > 0$ sabiti için olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \quad \text{ise} \\ 0 & x < 0 \quad \text{ise} \end{cases}$$

İle verilen sürekli bir rastgele değişkene λ parametreli bir *üstel* (ya da basitçe üstel dağılmış) rastgele değişken denir.



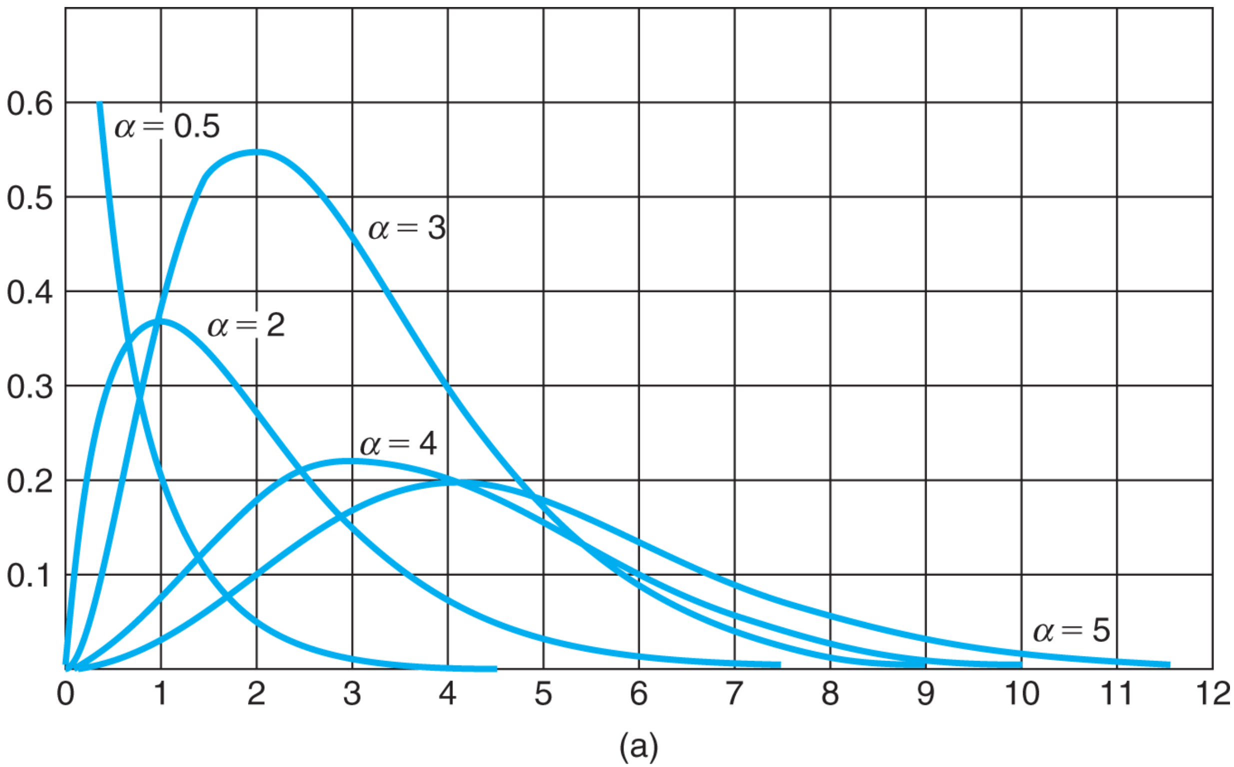
GAMA DAĞILIMI

Olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

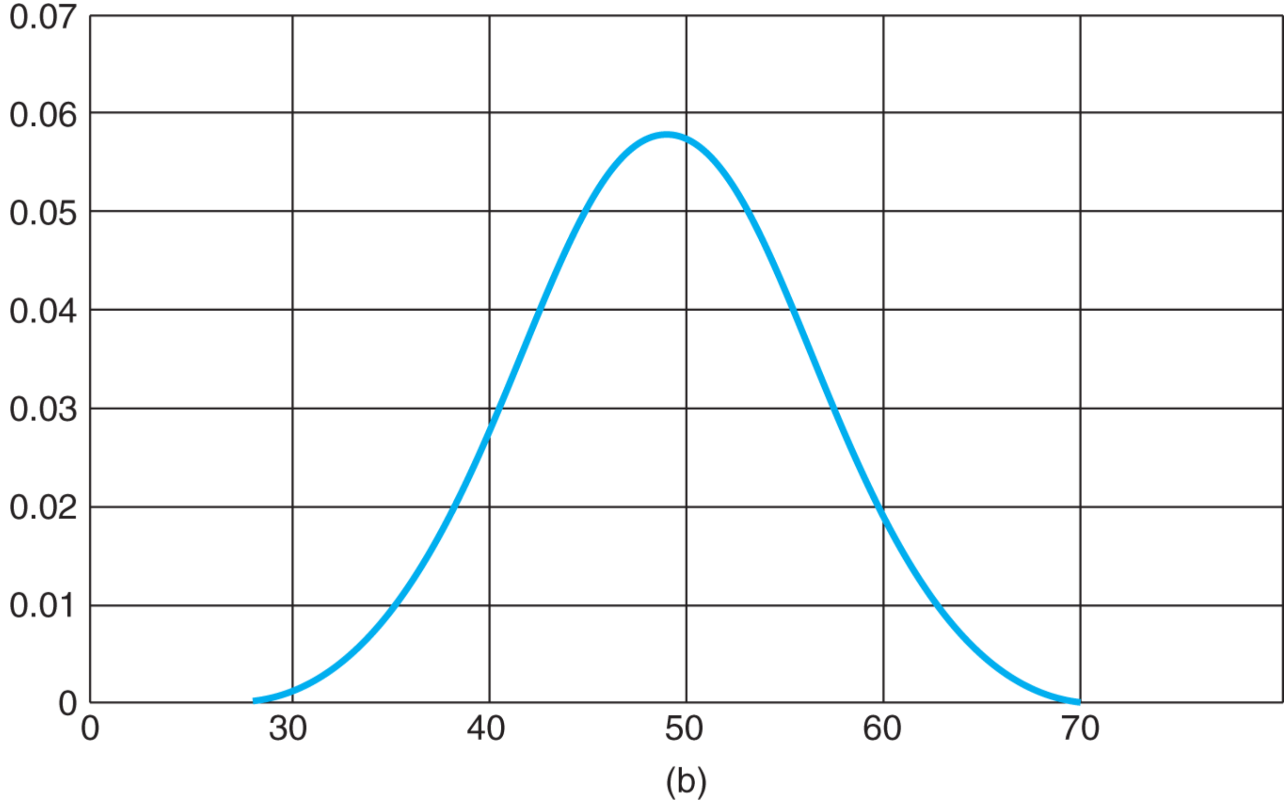
ile verilen bir rastgele değişkene $(\alpha, \lambda), \lambda > 0$ parametreleriyle gama dağılımına sahiptir denir.

GAMA DAĞILIMI



(a) α = .5, 2, 3, 4, 5 ve (b) α = 50. için gama (α, 1) yoğunluk grafikleri

GAMA DAĞILIMI



(a) $\alpha = .5, 2, 3, 4, 5$ ve (b) $\alpha = 50$. için gama $(\alpha, 1)$ yoğunluk grafikleri

NORMALDEN DOĞAN DAĞILIMLAR

I Ki-Kare Dağılımı

Tanım

Eğer $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$'ler bağımsız standart normal değişkenlerse, o zaman

$$X = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_n^2 \tag{5.8.1}$$

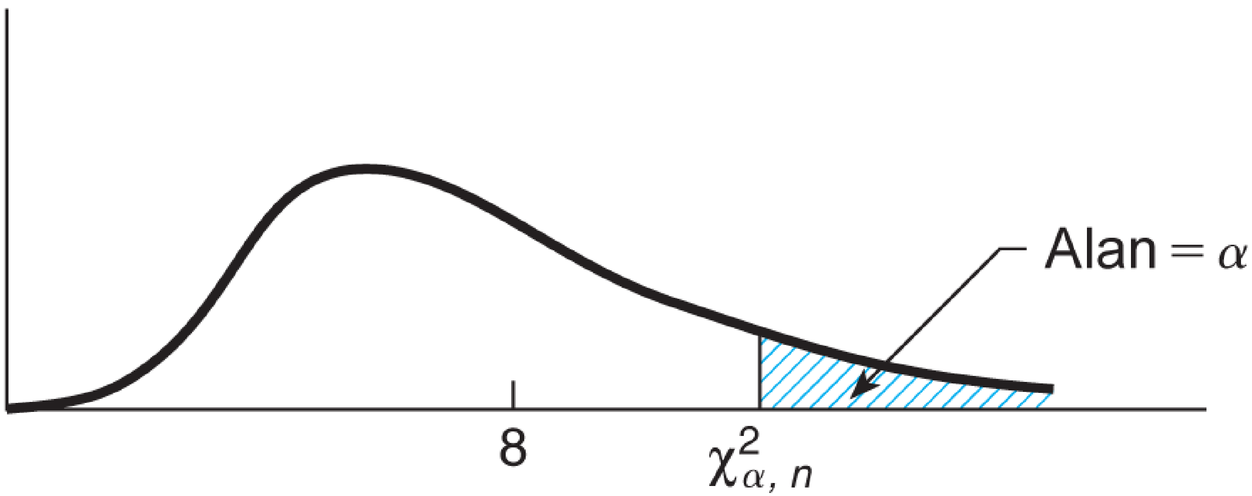
biçiminde tanımlanan X'e *n serbestlik dereceli ki-kare dağılımı*na sahiptir, denir. X'in n serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahip olduğunu ifade etmek için

$$X \sim \chi_n^2$$

gösterimini kullanacağız.

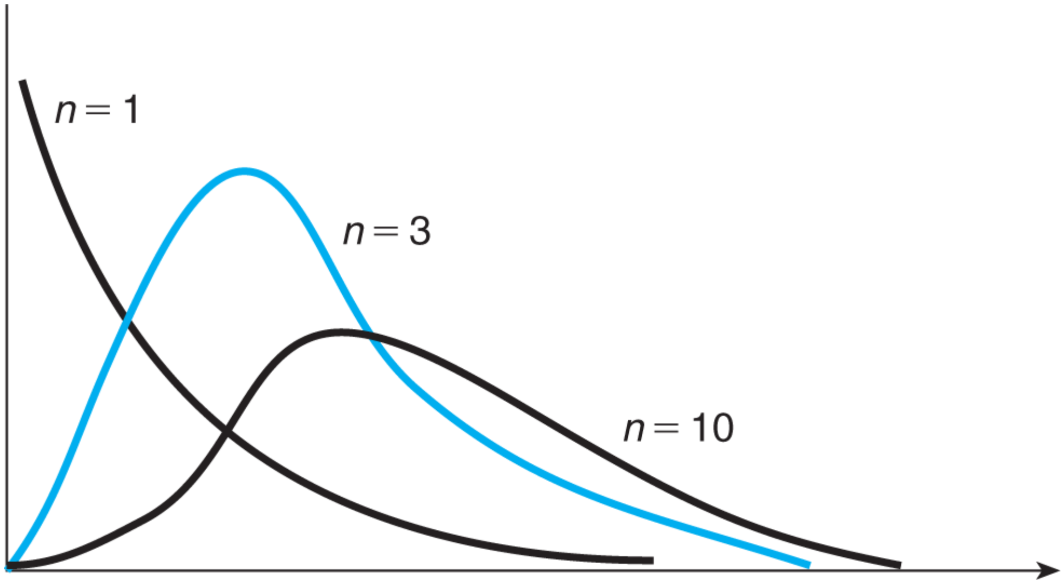
NORMALDEN DOĞAN DAĞILIMLAR

Serbestlik derecesi 8 olan ki-kare yoğunluk fonksiyonu



NORMALDEN DOĞAN DAĞILIMLAR

II Ki-Kare ve Gama Rastgele Değişkenleri Arasındaki İlişki



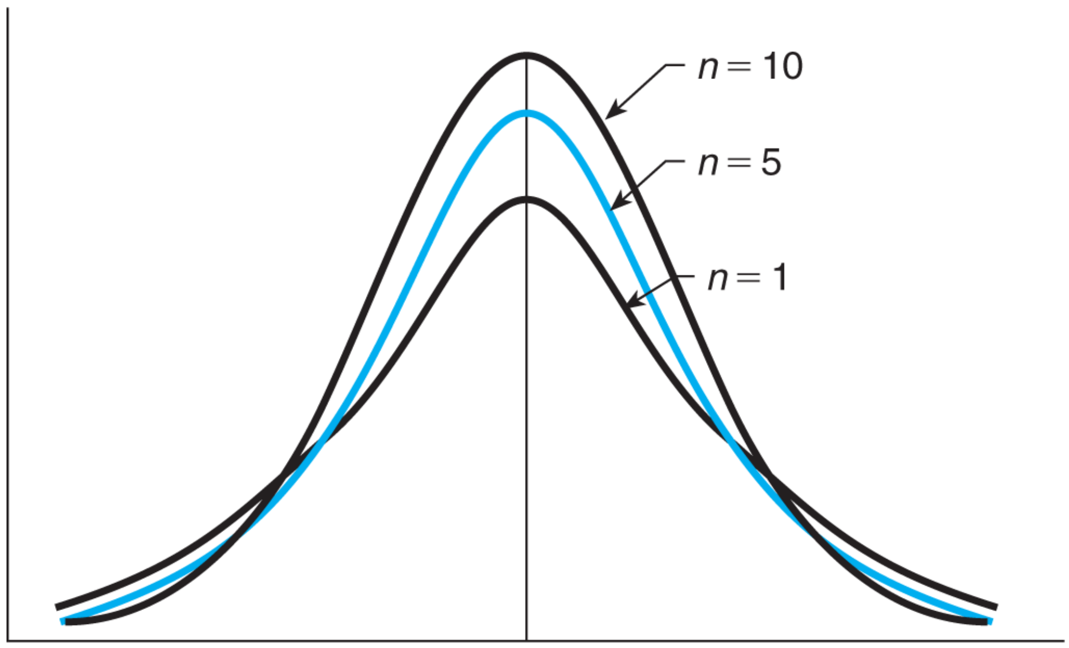
n serbestlik dereceli olan ki-kare yoğunluk fonksiyonu

NORMALDEN DOĞAN DAĞILIMLAR

***t*- Dağılımı**

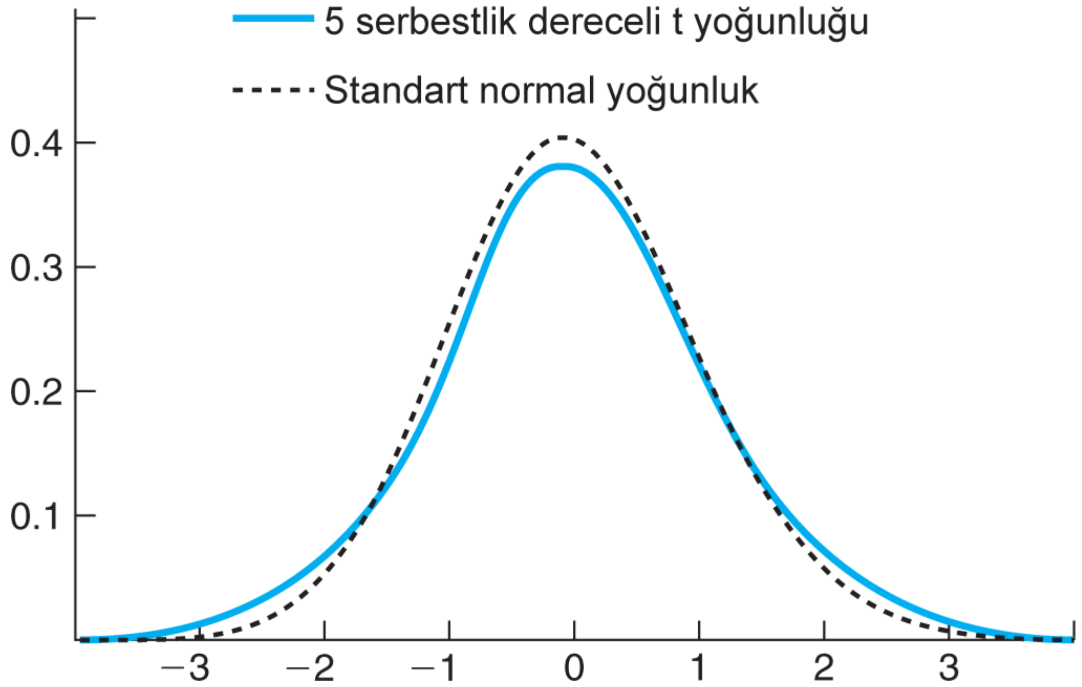
$$T_n = \frac{Z}{\sqrt{\chi_n^2 / n}}$$

NORMALDEN DOĞAN DAĞILIMLAR



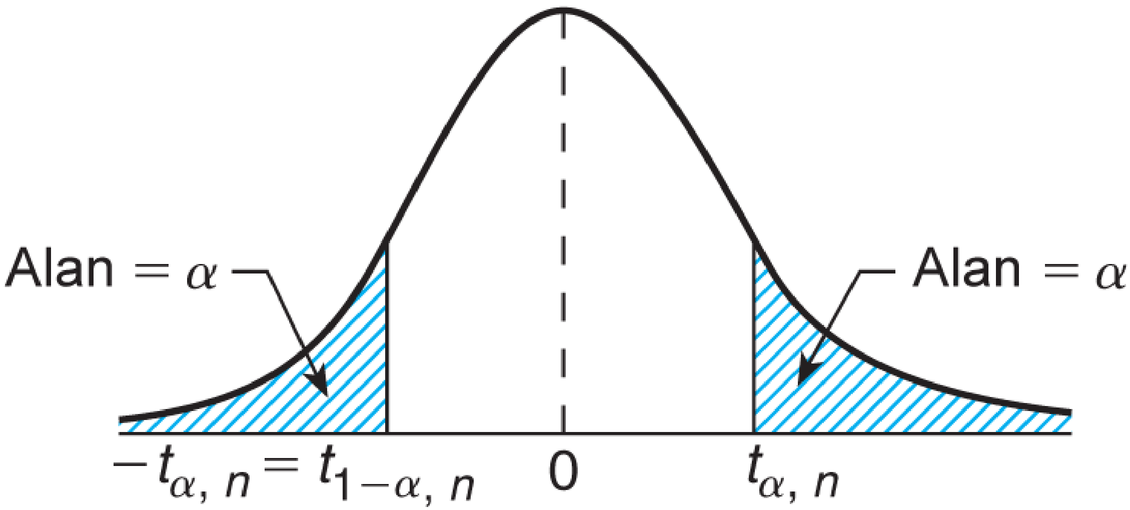
T_n'nin yoğunluk fonksiyonu

NORMALDEN DOĞAN DAĞILIMLAR



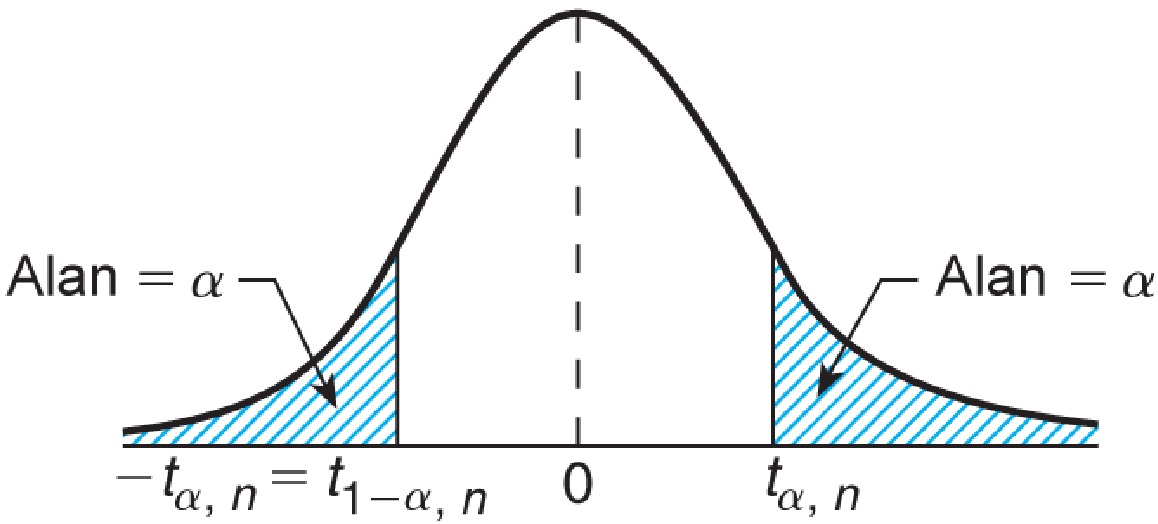
T5'nin yoğunluğunun standart normal yoğunlukla karşılaştırılması

NORMALDEN DOĞAN DAĞILIMLAR

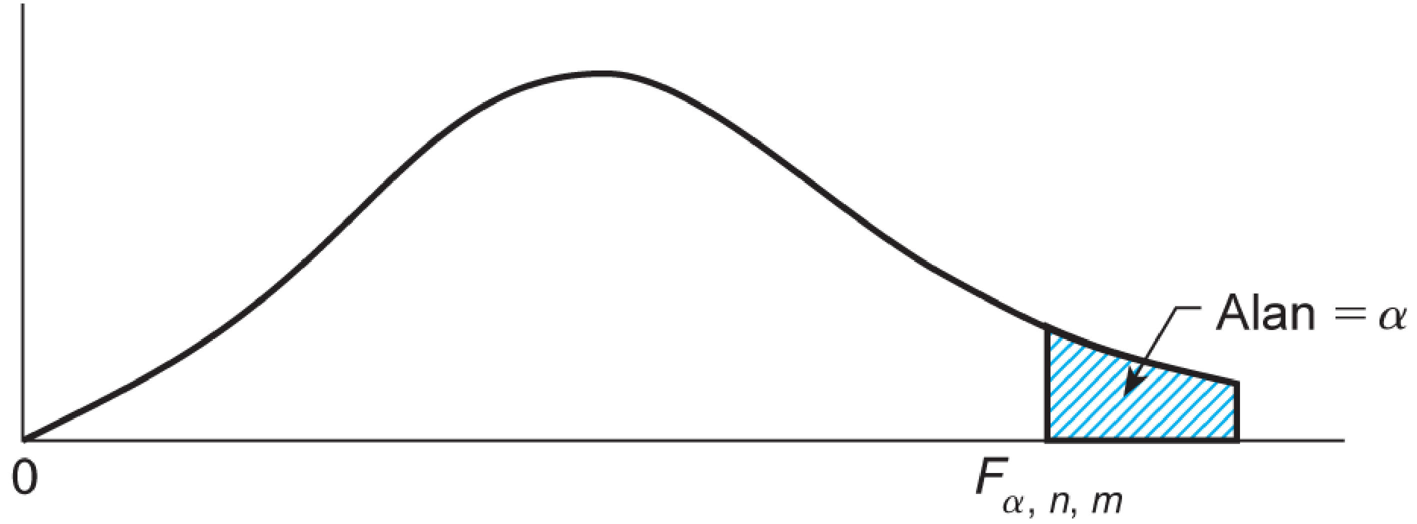


$$t_{1-\alpha,n} = -t_{\alpha,n}$$

F-DAĞILIMI



F-DAĞILIMI



$F_{n,m}$'nin yoğunluk fonksiyonu

LOJİSTİK DAĞILIMI

$$F(x) = \frac{e^{(x-\mu)/v}}{1 + e^{(x-\mu)/v}}, \qquad -\infty < x < \infty$$