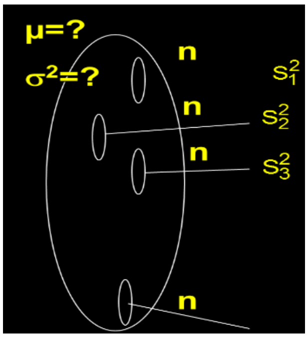
F-DAĞILIMI ve VARYANS ANALİZİ (ANOVA) TEKNİĞİ

Ortalaması ve varyansı bilinmeyen normal dağılım gösteren bir populasyondan rasgele alınan örneklerin her birinde hesaplanan örnek varyanslarını (ki bu örnek varyanslarının her biri bilinmeyen populasyon varyansının birer tahminidirler) ikişer ikişer birbirlerine bölerek bulunan sayısal değerlerin gösterdiği dağılıma F-Dağılımı denir.



Yani,

$$F_1 = \frac{S_{62}^2}{S_{391}^2}, \qquad F_2 = \frac{S_{624}^2}{S_9^2}, \ldots, F_k = \frac{S_{16098}^2}{S_3^2}$$

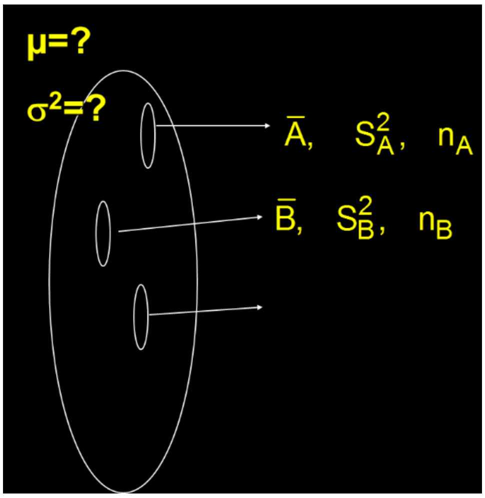
şeklinde hesaplanan F değerlerinin gösterdiği dağılıma F- Dağılımı adı verilir. Dikkat edileceği üzere her bir F-Değeri, her biri aynı populasyondan rasgele alınmış iki ayrı örnekten hesaplanmış iki adet varyansın birbirine bölünmesiyle elde edilmektedir. Dolayısıyla, F-Değerlerinin her birinin 1 olması BEKLENİR. Ancak, örneklemeden dolayı birçoğu 1'den farklı çıkar ve bir dağılım gösterirler.

F-Dağılımı, Z, t ve $\chi 2$ dağılımları gibi bir test dağılımıdır. F-Dağılımı sürekli bir dağılım olup, $[0,+\infty]$ aralığındaki sayısal değerleri alabilir. Varyans negatif olamayacağından negatif değer alamaz.

F-Dağılımının 2 parametresi vardır. Bunlar, F-Değerlerinin elde edilmesinde kullanılan 2 adet varyansın SERBESTLİK DERECELERİDİR. Dolayısıyla, bu varyansların serbestlik derecelerine göre birbirinden farklı sonsuz adet F-Dağılımı vardır ve bunlar birbirlerinden söz konusu 2 parametre ile ayrılırlar. Bundan dolayı da kritik bölgeleri (%5, %1,... vb.) belirleyen F-Değerleri uygulamada çok sık karşılaşılan serbestlik dereceleri için tablo şeklinde düzenlenmiştir.

Birbirleriyle karşılaştırılacak GRUP (muamele) sayısı 3 ve daha fazla ise bu grupların ortalamaları arasındaki farkların istatistik olarak önemli olup olmadığına karar vermede kullanılır. t-Dağılımı, grup sayısı 2 olduğunda F-Dağılımının özel bir halinden başka bir şey değildir.

F-DAĞILIMININ PRATİKTE KULLANIMI:



Ortalaması ve varyansı bilinmeyen bir populasyondan rasgele alınmış örneklerin her birinde ortalama ve varyanslar hesaplansa (n_A=n_B=n_C olabilirde olmayabilir de) hesaplanan bu istatistiklerden (ortalama ve varyans) yaralanarak bilinmeyen populasyon varyansı iki farklı şekilde tahmin edilebilir.

1. Örnek ortalamalarından yararlanılarak:

Hatırlanacağı üzere örnek ortalamalarından yararlanarak varyansı;

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sum d^2_{\bar{X}}}{k-1} = \frac{\sum \bar{X}^2 - \frac{\left(\sum \bar{X}\right)^2}{k}}{k-1} = \frac{\bar{A}^2 + \bar{B}^2 + \bar{C}^2 - \frac{(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})^2}{3}}{3-1}$$

şeklinde hesaplamak mümkündür. Öte yandan,

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2_X}{n} \Rightarrow \sigma^2_X = n.\sigma^2_{\bar{X}} \cong n.\left(\frac{\bar{A}^2 + \bar{B}^2 + \bar{C}^2 - \frac{(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})^2}{3}}{3-1}\right)$$

2. Örnek varyanslarından yararlanarak:

Örneklerin varyanslarının SERBESTLİK DERECELERİ ile TARTILI ortalamalarını alarak bilinmeyen populasyon varyansı;

$$\sigma^2_X \cong \frac{(n_A-1)S^2_A + (n_B-1)S^2_B + (n_C-1)S^2_C}{(n_A-1)+(n_B-1)+(n_C-1)} = \frac{\sum d^2_A + \sum d^2_B + \sum d^2_C}{(n_A-1)+(n_B-1)+(n_C-1)}$$

ifadesinden yararlanılarak tahmin edilir. Hatırlanacağı üzere bu şekildeki varyans tahminine TOPLANMIŞ VARYANS adı verilmektedir.

Böylece iki farklı yaklaşımla aynı populasyon varyansının iki ayrı tahmini elde edilmiş olur. Bu iki varyansı bir birine bölersek 1 adet F-Değeri elde ederiz.

Bölme işlemi, örnek ortalamalarından tahmin edilen varyansın (büyük KARELER

ORTALAMASININ), örnek varyanslarından tahmin edilen varyansa (küçük KARELER ORTALAMASINA) bölünmesi şeklinde yapılır.

Bu şekilde elde edilen F-değerinin serbestlik dereceleri (parametreleri),

(k-1) : (Grup sayısı -1) ve

$(n_A-1)+(n_B-1)+(n_C-1)$: Her bir grubun serbestlik derecelerinin toplamıdır.

Pratikte elimizdeki 3 ve daha fazla örneğin ortalamaları arasındaki farkların önemli olup olmadığına yukarıdaki gibi elde edilen bir F-Değeri yardımıyla karar vermek için yürütülen işlemlere VARYANS ANALİZİ (ANOVA) TEKNİĞİ adı verilir. Varyans Analizi Tekniğine ilişkin işlemler bir misal yardımıyla aşağıdaki gibi yürütülür.

ÖRNEK:

Üç farklı sınav yönteminin başarıya etkisini araştırmak amacıyla homojen (aynı zeka seviyesinde, aynı yaşta, aynı cinsiyette, aynı sınıfta, aynı başarı düzeyinde,...,vb.) öğrencilere uygulanan sınav yöntemleri sonunda aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir. Sınav yöntemlerinin ortalamaları arasındaki farklar tesadüften mi? İleri gelmektedir.

A (Test)	B (Yazılı)	C (Sözlü)
3	4	7
6	7	6
5	7	7
4	4	7
7	8	8

$\bar{A} = 5 \qquad \bar{B} = 6 \qquad \bar{C} = 7$

$\sum A = 25 \qquad \sum B = 30 \qquad \sum C = 35 \qquad \sum A + \sum B + \sum C = 90$

$\sum d_A^2 = 10. \qquad \sum d_B^2 = 14. \qquad \sum d_C^2 = 2.$

Bu 3 grup 2'şer 2'şer t-Testi ile karşılaştırılmaya çalışılırsa (A ile B, A ile C, B ile C) her karşılaştırmada mutlaka gruplardan biri dışarıda bırakılacağından hem hatalı bir işlem yapılmış hem de gereksiz yere zaman kaybedilmiş olur. Bunun yerine F-Dağılımından yararlanmak daha doğrudur.

F-Dağılımından yararlanabilmek için biri grup (örnek) ortalamaları kullanılarak diğeri de grup varyansları kullanılarak hesaplanmış iki adet varyansa gerek vardır. Bunları hesaplamadan önce hipotez takımı oluşturulur:

H_0: “Bu üç örnek aynı populasyondan rasgele alınmışlardır.” veya “Bu üç örnek ortalamaları arasındaki farklar tesadüften ileri gelmiştir.”

H_1: “Bu üç örnekten EN AZ İKİSİ (belki de hepsi) aynı populasyondan rasgele alınmamıştır.” veya “Bu örnek ortalamaları arasındaki farklardan EN AZ İKİSİ tesadüften ileri gelmemektedir.”

a) Örnek ortalamaları kullanılarak populasyon varyansının tahmini;

$$\sum d_{\bar{X}}^2 = \bar{A}^2 + \bar{B}^2 + \bar{C}^2 - \frac{(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})^2}{3} = 5^2 + 6^2 + 7^2 - \frac{(5+6+7)^2}{3} = 2.$$

$$S_{\bar{X}}^2 = \frac{\sum d_{\bar{X}}^2}{k-1} = \frac{2}{3-1} = 1 \Longrightarrow S_X^2 = n.S_{\bar{X}}^2 = 5x1 = 5.$$

b) Örnek varyansları kullanılarak populasyon varyansının tahmini;

$$S_X^2 = \frac{\sum d_A^2 + \sum d_B^2 + \sum d_C^2}{(n_A-1)+(n_B-1)+(n_C-1)} = \frac{10+14+2}{4+4+4} = 2.167$$

Varyansların oranlanmasında, 1. tahminin 2.tahmine bölünmesi kuralı göz önüne alınarak;

$$F = \frac{5}{2.167} = 2.307$$

Bu şekilde hesaplanan F-Değerinin hangi F-Dağılımına ait olduğunu bulabilmek için bu F-Değerinin parametrelerinin bulunması gerekir. Bu parametreler, F-Değerinin elde edildiği varyansların serbestlik dereceleri olduğundan,

k-1=3-1=2 ve $(n_A-1)+(n_B-1)+(n_C-1)=4+4+4=12$ bulunurlar.

2 ve 12 serbestlik dereceli F-Dağılımında %5’lik kritik bölge için F-Değeri, F-Tablosundan $F_T=3.88$ olarak okunur.

$F_T=3.88 > F_H=2.307$ olduğundan H_0 KABUL edilir. Yani, öğrencilere uygulanan sınav yöntemlerinin başarı üzerine etkileri arasındaki farklar tesadüften ileri gelmektedir.

Varyans Analizi Tekniğine ilişkin hesaplamalar uygulamada yukarıdaki gibi yapılmamaktadır. Bunun yerine;

G.K.T. = G.A.K.T. + G.İ.K.T. (H.K.T.) ilişkisinden yararlanılmaktadır. Burada;

G.K.T.: Genel Kareler Toplamı (Bütün gözlemlere ait Kareler Toplamı),

G.A.K.T. : Gruplar Arası Kareler Toplamı (Grup toplamlarına ait Kareler Toplamı), G.İ.K.T.: Grup İçi Kareler Toplamı (Aynı grup içindeki bireylere ait Kareler Toplamı. Aynı grup içindeki bireyler arasındaki farklılık tesadüften kaynaklandığı için pratikte bu ifade HATA Kareler Toplamı olarak adlandırılır) anlamına gelmektedirler. Bunların her biri aşağıdaki gibi hesaplanırlar:

$$GKT = 3^2 + 6^2 + \ldots + 8^2 - \frac{90^2}{15} = 36.$$

$$GAKT = \frac{(\sum A)^2}{n_A} + \frac{(\sum B)^2}{n_B} + \frac{(\sum C)^2}{n_C} - \frac{(\sum A + \sum B + \sum C)^2}{n_A + n_B + n_C}$$
$$= \frac{25^2}{5} + \frac{30^2}{5} + \frac{35^2}{5} - \frac{90^2}{15} = 10.$$

$$GİKT(HKT) = GKT - GAKT = 36 - 10 = 26.$$
veya
$$HKT = \sum d_A^2 + \sum d_B^2 + \sum d_C^2 = 10 + 14 + 2 = 26$$

Bu hesaplamaların hepsi **VARYANS ANALİZİ TABLOSU** adı verilen bir tablo halinde özetlenirler;

Varyasyon Kaynağı	Serbestlik Derecesi	Kareler Toplamı	Kareler Ortalaması	F-Değeri
Genel	14 (N-1)	36	~	
Gruplar Arası (Sınav Yönt. Arası)	2 (k-1)	10	10/2 = 5.	5/2.167=2.307
Grupları İçi (Hata)	12 ($\Sigma(n_i$-1)) (veya 14-2)	26	26/12=2.167	

Buradaki sonuçlar ile daha önceki sonuçların aynı olduğuna dikkat edilecek olursa, H_0 hipotezi KABUL edilir.

Tesadüf Parselleri Deneme Tertibi (Completely Randomized Design)

Eğer araştırılan faktöre reaksiyon bakımından kullanılacak, elde mevcut deneme materyali homojen ise **Tesadüf Parselleri** deneme tertibi en yaygın kullanılan en basit ve güvenilir deneme tertibidir.

Deneme materyali homojen olduğu zaman, bu deneme tertibi araştırıcıya istediği sayıda faktörü istediği sayıda tekerrür ile deneme olanağını verir. Bu deneme tertibinde denenen faktörlerin eşit sayıda tekerrüre sahip olması gerekmez. Fakat araştırıcı eşit sayıda tekerrür kullandığı zaman karşılaştırmaların daha güvenilir olacağını bilmelidir.

Tesadüf parselleri deneme tertibinden elde edilen verilerin istatistik analizi çok kolaydır. İstatistik analizler kayıp gözlemlerden dolayı karmaşık hale gelmez. Varyans analizi tablosu düzenlendiği zaman hata için en yüksek serbestlik derecesi bu deneme tertibinde elde edilir.

Bu deneme tertibi homojen deneme materyali sınırlı olduğu zaman da tercih edilir.

Tesadüf Parselleri Deneme Tertibinin Düzenlenmesi

Tesadüf parselleri deneme tertibinde, etkileri karşılaştırılacak faktörler deney ünitelerine tamamen tesadüfi olarak dağıtılmalıdır. Muamelelerin deney ünitelerine tesadüfi olarak dağıtılması ya kur'a yolu ile veya tesadüf sayıları kullanılarak (Tablo A) kullanılarak yapılır.

Kur'a yolu ile dağıtım yapılırken araştırıcı deney ünitelerini numaralandırır. Bu numaraları kâğıt üzerine yazar ve bunlardan hangisine hangi muamelenin uygulanacağını tamamen tesadüfen kur'a yolu ile belirler.

Muamelelerin deney ünitelerine tamamen tesadüfi dağıtılmasında tesadüf sayılarının kullanılması da güvenilir bir dağıtım şeklidir.

ÖRNEK 1:

Bir araştırıcı 4 farklı gübrenin (A, B, C ve D) haşhaş verimine etkisini araştırmak istiyor olsun. Denemenin 4 tekerrürlü yapılacağına karar verilmiş ise araştırıcının kontrol edilebilir özellikleri bakımından homojen 16 parsele ihtiyacı vardır. Çünkü her bir muameledeki parsel sayısı 4'tür. Denemede kullanılacak 16 parsel Şekil 1'de görüldüğü gibi numaralandırıldıktan sonra hangi gübrenin hangi parsellere uygulanacağı kur'a yolu ile tamamen tesadüfi olarak belirlenir ve deneme Şekil 1'de görüldüğü gibi tertiplenmiş olur.

Şekil 1. 4 farklı gübrenin deneneceği parseller

1 D	2 C	3 C	4 D
5 A	6 C	7 C	8 A
9 A	10 D	11 D	12 B
13 B	14 A	15 B	16 B

Araştırıcı bu şekilde kurması gereken bir denemeyi kolayca düzenleyebilir. Deneme tertiplenirken faktör sayısı ve tekerrür sayısı kurulacak denemeye göre değişecektir.

ÖRNEK 2:

3 farklı budama şeklinin elma verimine etkisini araştırmak isteyen bir araştırıcı kontrol edilebilen özellikleri bakımından homojen olan 9 elma ağacından 3'üne 1. budama, 3.üne 2. budama ve diğer 3.üne de 3. budama şeklini uygulamış ve ağaç başına elma verimlerini (kg) Tablo 2'deki şekilde elde etmiş olsun.

Tablo 2. 3 farklı budama şekli uygulanan ağaçlardan elde edilen elma verimleri

	Budama1	Budama2	Budama3	
	24	19	26	
	25	21	28	
	26	23	30	
Toplam	75	63	84	222
Ortalama	25.0	21.0	28.0	24.67

Bu denemede araştırıcı 3 muameleyi 3 tekerrürlü olarak denemiştir. Bu denemede toplam gözlem sayısı 9'dur. 9 tane gözlem arasındaki varyasyonun sebepleri muamelelerin farklılığı ve muameleler içindeki gözlemler arasındaki farklılık (deneysel hata)'tır. Verilere ait kareler toplamları aşağıdaki şekilde hesaplanabilir:

Genel kareler toplamı;

$$GKT=(24-24.67)^2+(25-24.67)^2+(26-24.67)^2+(19-24.67)^2+(2124.67)^2+(23-4.67)^2+(26-4.67)^2+(28-24.67)^2+(30-24.67)^2=92.0$$

Gruplar arası kareler toplamı;

$$GAKT=3[(25-24.67)^2+(21-24.67)^2+(28-24.67)^2]=74.0$$

Gruplar içi kareler toplamı;

$$GKT=(24-25)^2+(25-25)^2+(26-25)^2+(19-21)^2+(21-21)^2+(23-21)^2+(26-28)^2+(28-28)^2+(30-28)^2=18.0$$

olarak bulunur.

Daha önce de belirtildiği gibi gruplar arası kareler toplamı ile gruplar içi kareler toplamının toplamı genel kareler toplamına eşittir. Yani;

GKT=GAKT+GIKT’dır.

Bu şekilde hesaplanabileceği gibi, genel kareler toplamından gruplar arası kareler toplamı çıkarılarak da hesaplanabilir. Varyans analizi tablosunu oluşturmak için kareler toplamları aşağıdaki şekilde de hesaplanır:

$$\text{GKT} = (24^2 + 25^2 + 26^2 + \ldots + 28^2 + 30^2) - \frac{(24 + 25 + \ldots + 28 + 30)^2}{9}$$

$$= 5568 - \frac{(222)^2}{9} = 92$$

$$\text{GAKT} = \frac{(75)^2}{3} + \frac{(63)^2}{3} + \frac{(84)^2}{3} - \frac{(222)^2}{9} = 5550 - 5476 = 74$$

$$\text{GIKT} = (24^2 + 25^2 + 26^2 - \frac{(24 + 25 + 26)^2}{3}) +$$

$$(19^2 + 21^2 + 23^2 - \frac{(19 + 21 + 23)^2}{3}) +$$

$$(26^2 + 28^2 + 30^2 - \frac{(26 + 28 + 30)^2}{3}) = 2.0 + 8.0 + 8.0 = 18.0$$

veya gruplar içi kareler toplamı, genel kareler toplamından gruplar arası kareler toplamı çıkarılarak, GIKT=92.0-74.0=18.0, bulunur. Gruplar içi kareler toplamı toplanmış varyans olup, aynı muameleye tabi tutulan bireyler arası farklılığın, yani deneysel hatanın ölçüsüdür. Hesaplamalar tamamlandıktan sonra varyans analizi tablosu Tablo 3’te görüldüğü şekilde düzenlenir.

TABLO 3. Tablo 2’deki veriler için düzenlenen varyans analizi tablosu

Varyasyon kaynağı	Serbestlik derecesi	Kareler toplamı	Kareler ortalaması
Gruplar arası	3-1 =2	74.0	37.0
Gruplar içi	3(3-1) =6	18.0	3.0
Genel	(3)(3)-1=8	92.0	-

Araştırıcının kontrol ve karşıt hipotezlerini de aşağıdaki verildiği şekilde oluşturmuş olması gerekir.

H_0: Elma verimi üzerine etki bakımından 3 farklı budama yöntemi arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir. 3 budama yöntemi kullanılarak gözlenmiş elma verimi ortalamaları arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir ve sıfır kabul edilebilir.

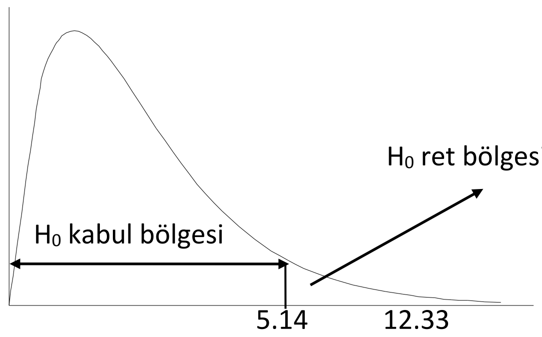
Yani; $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$’tür.

H_1: En az iki budama yönteminin (belki de tüm budama yöntemlerinin), elma verimi üzerine etki bakımından aralarındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir.

Bu örnek için F-değeri;

$$F = \frac{37.0}{3.0} \cong 12.33$$

olarak bulunur. F-dağılımının iki serbestlik derecesine bağlı bir dağılım olduğu daha önce belirtilmişti. Tablo 3'te görüldüğü gibi GAKO'sına ait serbestlik derecesi 2 ve gruplar içi kareler ortalamasına ait serbestlik derecesi 6'dır. Yani, burada araştırıcıyı ilgilendiren 2 ve 6 serbestlik dereceli F-dağılımıdır. Eğer araştırıcı I. tip hata olasılığını %5 olarak kararlaştırmışsa, Tablo B'den 2 ve 6 serbestlik dereceli F-dağılımında %5'lik H_0 hipotezinin ret bölgesinin 5.14 değerinde başladığını belirler. Şekil 2'de görüldüğü gibi hesaplanan F-değeri, H_0 hipotezinin ret bölgesine düşmektedir. Bu durumda, araştırıcı H_0 hipotezini reddeder. Yani, en az iki budama yönteminin, elma verimi üzerine etki bakımından aralarındaki fark tesadüften ileri gelmediği kararına varır.



ŞEKİL 2 ve 6 serbestlik dereceli F-dağılımında H_0 ret ve kabul bölgeleri

ÖRNEK 3:

A, B, C, D, E, F ve G gibi 7 muamelenin tesadüf parselleri deneme tertibinde denendiği bir denemeden elde edilen veriler Tablo 4'teki gibi bulunmuştur.

Tablo 4. 7 muamelenin tesadüf parselleri deneme tertibinde denendiği bir denemeden elde edilen veriler

	A	B	C	D	E	F	G	
	7	12	21	14	25	7	6	
	7	17	20	18	24	10	9	
	15	12	19	18	25	11	11	
	11	18	19	19	22	15	8	
	9	18	18	19	20	10	9	
Toplam	49	77	97	88	116	53	43	523
Ortalama	9.8	15.4	19.4	17.6	23.2	10.6	8.6	

Denemeyi yapan araştırıcının amacı muameleler arasında üzerinde durulan özelliğe etki bakımından istatistik olarak önemli bir farklılığın olup olmadığını araştırmaktır. Bunun için ilk olarak hipotezler kurulduktan sonra aşağıda görüldüğü şekilde kareler toplamları hesaplanarak Tablo 5'te görüldüğü gibi varyans analizi tablosu düzenlenir.

H_0: $\mu_A = \mu_B = \mu_C = \mu_D = \mu_E = \mu_F = \mu_G$

H_1: En az iki muamele ortalaması arasında üzerinde durulan özelliğe etki bakımından fark istatistik olarak önemlidir.

$$GKT = 7^2 + 7^2 + 15^2 + \ldots + 11^2 + 8^2 + 9^2 - \frac{523^2}{35} = 1075.89$$

$$GAKT = \frac{49^2 + 77^2 + 97^2 + 88^2 + 116^2 + 53^2 + 43^2}{5} - \frac{523^2}{35} = 904.29$$

$$GIKT = 1075.89 - 904.29 = 171.60$$

TABLO 5. 7 farklı muamelenin denendiği denemeden elde edilen veriler için düzenlenen varyans analizi tablosu

Varyasyon Kaynağı	Serbestlik derecesi	Kareler toplamı	Kareler ortalaması	F-değeri
Muameleler arası	6	904.29	150.71	24.59*
Muameleler içi (Hata)	28	171.60	6.13	
Genel	34	1075.89	-	

Tablo 5'teki F-değeri 6 ve 28 serbestlik derecesinde %5 seviyesindeki F-tablo değeri (2.45) ile karşılaştırılır. Hesaplanan F-değeri (24.59), tablo değerinden büyük olduğu için H_0 hipotezi reddedilerek, en az iki muamele ortalaması arasında üzerinde durulan özelliğe etki bakımından fark istatistik olarak önemli olduğu kararına varılır.

ÖRNEK 4:

Dört farklı gübrenin soya verimine etkisini araştırmak üzere tesadüf parselleri deneme tertibinde yürütülen denemeden elde edilen soya verimleri Tablo 6'daki gibi bulunmuştur. Gübreler arasında soya verimine etki bakımından istatistik olarak önemli bir farkın olup olmadığı araştırılacaktır.

Bu denemede her gübre eşit sayıda parsele uygulanmamıştır. Yukarıda görüldüğü gibi birinci gübre 4 parsele, 2. ve 3. gübreler 3 parsele ve 4. gübre 5 parsele uygulanmış veya bu sayıda parsellerde soya verimi saptanabilmiştir. Tesadüf parselleri deneme tertibinde muamele gruplarındaki gözlem sayılarının eşit olması zorunlu değildir. Muamele gruplarındaki gözlem sayılarının farklı olması kareler toplamlarının hesaplanma şeklini etkilemez. Her gübre çeşidi için elde edilen gözlemler, toplamları, ortalamaları ve her gruptaki gözlem sayıları Tablo 6'da özetlenmiştir.

Tablo 6. Dört farklı gübrenin denendiği denemeden elde edilen soya verimleri

	GÜBRE1	GÜBRE2	GÜBRE3	GÜBRE4	
	45	69	53	56	
	50	75	50	58	
	46	73	49	60	
	45			58	
				55	
Toplam	186	217	152	287	842
Ortalama	46.50	72.33	50.67	57.40	56.13
N	4	3	3	5	15

Gübre çeşitleri arasında soya verimine etki bakımından farklılık olup olmadığını araştırmak isteyen araştırıcı ilk olarak aşağıdaki şekilde hipotezlerini kurar.

H_0: Soya verimine etki bakımından dört gübre arasındaki fark tesadüften ileri gelmektedir. Gübre çeşitleri arasında soya verimine etki bakımından gözlenen fark sıfır kabul edilebilir. Yani;

$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$'tür.

H_1: En az iki gübre çeşidi soya verimine etki bakımından birbirinden farklıdır. Soya verimleri bakımından aralarındaki fark tesadüften ileri gelmemektedir.

Daha sonra, genel kareler ve gruplar arası kareler toplamı aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$GKT = (45^2 + 50^2 + 46^2 + \ldots + 58^2 + 55^2) - \frac{(45 + 50 + \ldots + 58 + 55)^2}{15}$$

$$= 48580.0 - \frac{(842)^2}{15} = 1315.73$$

$$GAKT = \frac{(186)^2}{4} + \frac{(217)^2}{3} + \frac{(152)^2}{3} + \frac{(287)^2}{5} - \frac{(842)^2}{15}$$

$$= 48520.5 - 47264.3 = 1256.20$$

Genel ve gruplar arası kareler toplamı hesaplandıktan sonra gruplar içi kareler toplamı;

1315.73=1256.20+GIKT ve GIKT=59.53

olarak bulunur. Bu örnekte genel serbestlik derecesi 15-1=14, gruplar arası serbestlik derecesi 4-1=3 ve gruplar içi serbestlik derecesi ise 14-3=11 (veya (4-1)+(3-1)+(3-1)+(5-1)=11)'dir. Bu örnek için düzenlenen varyans analizi tablosu Tablo 7'de verilmiştir.

TABLO 7. Varyans analizi tablosu

Varyasyon Kaynağı	Serbestlik derecesi	Kareler toplamı	Kareler ortalaması
Gübre çeşitleri arası	3	1256.20	418.73
Gübre çeşitleri içi (hata)	11	59.53	5.41
Genel	14	1315.73	-

Hangi hipotezin kabul edileceğine karar vermek için F-değeri;

$$F = \frac{418.73}{5.41} \cong 77.40$$

olarak bulunur. Eğer araştırıcı I. tip hata olasılığını %5 olarak kararlaştırmışsa, Tablo B'den 3 ve 11 serbestlik dereceli F-dağılımında %5'lik H_0 hipotezinin ret bölgesinin 3.59 değerinden başladığını belirler. Bu durumda geçerli olması gereken H_1 karşıt hipotezidir. Yani en az iki gübre çeşidi arasında, soya verimine etki bakımından fark tesadüften ileri gelmemektedir. Hangi gübre çeşitleri arasındaki farklılığın tesadüften ileri gelmediğinin araştırılması için "çoklu karşılaştırma yöntemleri" kullanılır.

Yararlanılan Kaynaklar

DÜZGÜNEŞ, O., KESİCİ, T., KAVUNCU, O. ve GÜRBÜZ, F. 1987. Araştırma ve Deneme Metodları. (İstatistik Metodları II). Ankara Üniversitesi, Ziraat Fakültesi Yayınları: 1021, Ders Kitabı: 295. Ankara.

FREUND, J. E. 1971. Mathematical Statistics. Second Edition. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

MONTGOMERY, D. C. (2001). Design and Analysis of Experiments (Fifth Edition). John Wiley & Sons Inc., New York, USA.

PETERSON, G. R. 1985. Design and Analysis of Experiments. Marcel Dekker, Inc., New York and Basel.

SNEDECOR, W. and COCHRAN W. G. 1980. Statistical Methods. Seventh Edition. The Iowa state University Press, Ames, Iowa, USA.

İstatistik Tablolar

TABLO A. Student'in t- dağılımı

TABLO B. F değerleri dağılımında %5 alanını ayıran kritik değerler

TABLO C. F değerleri dağılımında %1 alanını ayıran kritik değerler

TABLO D. P=0.05 noktasındaki standardize edilmiş varyasyon genişlikleri (Duncan testi)

TABLO E. P=0.01 noktasındaki standardize edilmiş varyasyon genişlikleri (Duncan testi)

TABLO A. Student'in t- dağılımı (S.D.; serbestlik derecesi)

P(..den büyük "t" değerlerinin oluş ihtimali) Çift taraflı test için olasılıklar					
S.D.	%20	%10	%5	%2	%1
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.834	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.581	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
50	1.299	1.676	2.008	2.403	2.678
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
80	1.292	1.664	1.990	2.374	2.638
100	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626
200	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576
	%10	%5	%2.5	%1	%0.5
	Tek taraflı test için olasılıklar				

TABLO B. F değerleri dağılımında P-0.05 alanını ayıran kritik değerler

Gruplar içi kareler ortalaması serbestlik derecesi	Gruplar arası kareler ortalaması serbestlik derecesi										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.93
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.78	4.74	4.70
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.63	3.60
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.34	3.31
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.32	3.29	3.23	3.18	3.13	3.10
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.97	2.94
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.86	2.82
12	4.75	3.88	3.49	3.26	3.11	3.00	2.92	2.85	2.80	2.76	2.72
13	4.67	3.80	3.41	3.18	3.02	2.92	2.84	2.77	2.72	2.67	2.63
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.77	2.70	2.65	2.60	2.56
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.70	2.64	2.59	2.55	2.51
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.45
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.62	2.55	2.50	2.45	2.41
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.55	2.48	2.43	2.38	2.34
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.52	2.45	2.40	2.35	2.31
25	4.24	3.38	2.99	2.76	2.60	2.49	2.41	2.34	2.28	2.24	2.20
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.34	2.27	2.21	2.16	2.12
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.07	2.04
60	4.00	3.15	2.76	2.52	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95
120	3.92	3.07	2.68	2.44	2.29	2.17	2.08	2.01	1.95	1.90	1.86
∞	3.84	2.99	2.60	2.37	2.21	2.09	2.01	1.94	1.88	1.83	1.79

TABLO C. F değerleri dağılımında P-0.01alanını ayıran kritik değerler

Gruplar içi kareler ortalaması serbestlik derecesi	Gruplar arası kareler ortalaması serbestlik derecesi										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.90	14.80	14.66	14.54	14.45
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.40	10.28	10.15	10.05	9.96
6	13.74	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.79
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	7.00	6.84	6.71	6.62	6.54
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.19	6.03	5.91	5.82	5.74
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.62	5.47	5.35	5.26	5.18
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.21	5.06	4.95	4.85	4.78
11	9.65	7.20	6.22	5.67	5.32	5.07	4.88	4.74	4.63	4.54	4.46
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.65	4.50	4.39	4.30	4.22
13	9.07	6.70	5.74	5.20	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	4.02
14	8.86	6.51	5.56	5.03	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.61
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.52
18	8.28	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.85	3.71	3.60	3.51	3.44
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.36
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.71	3.56	3.45	3.37	3.30
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.21	3.13	3.05
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.06	2.98	2.90
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.88	2.80	2.73
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.56
120	6.84	4.78	3.94	3.47	3.17	2.95	2.79	2.65	2.56	2.47	2.40
∞	6.64	4.60	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.24

TABLO D. p=0.05 noktasındaki standardize edilmiş varyasyon genişlikleri (Duncan testi)

Hata serbestlik derecesi	Grup sayıları										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	3.93	4.01	4.03	4.03	4.03	4.03	4.03	4.03	4.03	4.03	4.03
5	3.64	3.75	3.80	3.81	3.81	3.81	3.81	3.81	3.81	3.81	3.81
6	3.46	3.59	3.65	3.68	3.69	3.70	3.70	3.70	3.70	3.70	3.70
7	3.34	3.48	3.55	3.59	3.61	3.62	3.63	3.63	3.63	3.63	3.63
8	3.26	3.40	3.47	3.52	3.55	3.57	3.57	3.58	3.58	3.58	3.58
9	3.20	3.34	3.42	3.47	3.50	3.52	3.54	3.54	3.55	3.55	3.55
10	3.15	3.29	3.38	3.43	3.47	3.49	3.51	3.52	3.52	3.53	3.53
11	3.11	3.26	3.34	3.40	3.43	3.46	3.48	3.49	3.50	3.51	3.51
12	3.08	3.22	3.31	3.37	3.41	3.44	3.46	3.47	3.48	3.49	3.50
13	3.05	3.20	3.29	3.35	3.39	3.42	3.44	3.46	3.47	3.48	3.48
14	3.03	3.18	3.27	3.33	3.37	3.40	3.43	3.44	3.46	3.47	3.47
15	3.01	3.16	3.25	3.31	3.36	3.39	3.41	3.43	3.45	3.46	3.47
16	3.00	3.14	3.24	3.30	3.34	3.38	3.40	3.42	3.44	3.45	3.46
17	2.98	3.13	3.22	3.28	3.33	3.37	3.39	3.41	3.43	3.44	3.45
18	2.97	3.12	3.21	3.27	3.32	3.36	3.38	3.41	3.42	3.43	3.45
19	2.96	3.11	3.20	3.26	3.31	3.35	3.38	3.40	3.41	3.43	3.44
20	2.95	3.10	3.19	3.26	3.30	3.34	3.37	3.39	3.41	3.42	3.44
24	2.92	3.07	3.16	3.23	3.28	3.32	3.34	3.37	3.39	3.41	3.42
30	2.89	3.03	3.13	3.20	3.25	3.29	3.32	3.35	3.37	3.39	3.41
40	2.86	3.01	3.10	3.17	3.22	3.27	3.30	3.33	3.35	3.37	3.39
60	2.83	2.98	3.07	3.14	3.20	3.24	3.28	3.31	3.33	3.36	3.37
120	2.80	2.95	3.05	3.12	3.17	3.22	3.25	3.29	3.31	3.34	3.36
∞	2.77	2.92	3.02	3.09	3.15	3.19	3.23	3.26	3.29	3.32	3.34

TABLO E. P=0.01 noktasındaki standardize edilmiş varyasyon genişlikleri (Duncan testi)

Hata serbestlik derecesi	Grup sayıları										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	6.512	6.677	6.740	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756	6.756
5	5.702	5.893	6.040	6.065	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074	6.074
6	5.243	5.439	5.549	5.614	5.655	5.680	5.694	5.701	5.703	5.703	5.703
7	4.949	5.145	5.260	5.334	5.383	5.416	5.439	5.454	5.464	5.470	5.472
8	4.746	4.939	5.057	5.135	5.189	5.227	5.256	5.276	5.291	5.302	5.309
9	4.596	4.787	4.906	4.986	5.043	5.086	5.118	5.142	5.160	5.174	5.185
10	4.482	4.671	4.790	4.871	4.931	4.975	5.010	5.037	5.058	5.074	5.088
11	4.392	4.579	4.697	4.780	4.841	4.887	4.924	4.952	4.975	4.994	5.009
12	4.320	4.504	4.622	4.706	4.767	4.815	4.852	4.883	4.907	4.927	4.944
13	4.260	4.442	4.560	4.644	4.706	4.755	4.793	4.824	4.850	4.872	4.889
14	4.210	4.391	4.508	4.591	4.654	4.704	4.743	4.775	4.802	4.824	4.843
15	4.168	4.347	4.463	4.547	4.610	4.660	4.700	4.733	4.760	4.783	4.803
16	4.131	4.309	4.425	4.509	4.572	4.622	4.663	4.696	4.724	4.748	4.768
17	4.099	4.275	4.391	4.475	4.539	4.589	4.630	4.664	4.693	4.717	4.738
18	4.071	4.246	4.362	4.445	4.509	4.560	4.601	4.635	4.664	4.689	4.711
19	4.046	4.220	4.335	4.419	4.483	4.534	4.575	4.610	4.639	4.665	4.686
20	4.024	4.197	4.312	4.395	4.459	4.510	4.552	4.587	4.617	4.642	4.664
24	3.956	4.126	4.239	4.322	4.386	4.437	4.480	4.516	4.546	4.573	4.596
30	3.889	4.056	4.168	4.250	4.314	4.366	4.409	4.445	4.477	4.504	4.528
40	3.825	3.988	4.098	4.180	4.244	4.276	4.339	4.376	4.408	4.436	4.461
60	3.762	3.922	4.031	4.111	4.174	4.226	4.270	4.307	4.340	4.368	4.394
120	3.702	3.858	3.965	4.044	4.107	4.158	4.202	4.239	4.272	4.301	4.327
∞	3.643	3.796	3.900	3.978	4.040	4.091	4.135	4.172	4.205	4.235	4.261