## KONU 1: DOĞRUSAL PROGRAMLAMAYA GİRİŞ

### 1.1. Tanım

Yöneylem Araştırmasının en gelişmiş ve yaygın uygulama alanını oluşturan Doğrusal Programlama (DP), doğrusal karar modelleri ile ilgili kavram ve yöntemler topluluğudur. DP, belirli doğrusal eşitlik ve/veya doğrusal eşitsizlik kısıtları koşulunda, doğrusal bir amaç fonksiyonunun en iyi (optimal) değerinin elde edilmesine ilişkin bir programlama türüdür. Ayrıntıları bilinen koşullar altında uygun bir karar alma yöntemi olarak da tanımlanabilir.

### 1.2. Tarihçe

DP, II. Dünya Savaşı sırasında askeri uygulamalar da kullanılmak amacıyla geliştirilmiş olan bir problem çözme yöntemidir. Savaş zamanı operasyonların yürütebilmesi için oldukça karmaşık problemlerin hızla çözülmesi gerekmektedir. Örneğin, farklı cephelerde olacak asker sayısının belirlenmesi, geniş coğrafyalara dağılmış askerlerin yeme, içme, barınma gibi ihtiyaçlarının aksamadan karşılanması, havalanan bir savaş uçağının en kısa mesafeyi kat ederek belli hedefleri vurması için izlemesi gereken rotanın belirlenmesi, vb. DP başlangıçta askeri gereksinimler için geliştirilmiş olmakla birlikte, günümüzde endüstriyel ve ekonomik alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır.

Doğrusal Programlama Problemleri (d.p.p.)' nin çözümleri ile ilgili ilk çalışmalar Rus matematikçi L.B. Kantorovich ve Amerikalı matematikçi G.F. Dantzing tarafından yapılmıştır. L.B. Kantorovich (1939), d.p.p. biçiminde formüle edilen bir çok uygulamalı problem üzerinde çalışmıştır. Dantzing (1947) tarafından geliştirilen Simpleks Yöntem DP alanındaki en büyük gelişmelerdendir. Hitchclock (1941), d.p.p.' nin özel bir türü olan ulaştırma problemlerinin çözümü üzerinde çalışmalar yapmıştır. Bir ekonomist olan G. Stigler (1945), en küçük maliyetli diyet problemi üzerinde çalışmalar yapmıştır. 1953 yılından sonra d.p.p.' nin çözümü için yapılan teorik ve pratik çalışmalar hızlanmıştır. Bilgisayar teknolojisini ilerlemesi ile önerilen çözümlerin büyük ölçekli problemlere rahatlıkla uygulanması sağlanmıştır. Günümüzde, MATLAB, LINDO, LINGO gibi programlar ile fazla zaman ve iş gücü kullanımına gerek kalmaksızın, büyük ölçekli d.p.p.' nin çözümleri yapılabilmektedir. Bu ders kapsamında, MATLAB programında bulunan DP ile ilgili çözüm komutlarının kullanımı ile d.p.p.'nin en iyilenmesi gerçekleştirilecektir.

### 1.3. Doğrusal Programlamanın Uygulama Alanları

- Ulaştırma problemleri
- Portföy yönetimi problemleri
- Makine-işgücü atama problemleri
- Beslenme problemleri
- Ürün karışım problemleri
- Pazarlama problemleri
- Tarımsal planlama problemleri
- Üretim stok kontrol problemleri
- İşletmelerde görev planlaması problemleri
- Dual modellerin ekonomik yorumu problemleri

### 1.4. Doğrusal Programlama İçin Temel Kavramlar

Gerçek dünyada ilgilenilen bir probleme ilişkin genel anlamda karşılaşılan ve cevaplanması istenilen üç temel soru vardır. Bunlar:

i. Problemde belirlenmek istenilen nedir?
ii. Problem hangi koşullar altında tanımlıdır?
iii. Problem için en iyi çözüm nedir?

Bu üç sorunun sırasıyla yanıtı DP' da kullanılan üç önemli temel kavram ile ilişkilidir. Bu kavramlar,

i. Karar değişkenleri
ii. Kısıt fonksiyonları
iii. Amaç fonksiyonu

biçimde tanımlıdır. Karar değişkenleri, problemi çözen kişinin kontrolünde en iyi değeri elde edilmek istenilen, negatif olmayan niceliksel değerler alan değişkenlerdir. Problemin en iyi değerinin elde edilmesinde dikkate alınan koşullardır. Kısıt fonksiyonları, eşitlik veya eşitsizlik biçimlerinde tanımlı olabilir. Amaç fonksiyonu, problem için en iyi çözüm değerine ulaşılmasını sağlayan fonksiyondur. DP' da amaç fonksiyonu ve kısıt fonksiyonları doğrusal fonksiyonlar biçiminde tanımlanır. Bu fonksiyonlardan herhangi birinin doğrusal olmaması durumunda d.p.p.' den söz edilemez.

### 1.5 Matematiksel Model

Uygulamalı matematiğin bir alanı olan matematiksel programlama, verilen herhangi bir fonksiyonun en iyi değerinin (minimum ya da maksimum) elde edilmesini hedefler. $n$ sayıda karar değişkeninden oluşan bir karar vektörü $\mathbf{X} = \left[X_1 \; X_2 \ldots X_n\right]'$ biçiminde tanımlı olmak üzere, bir matematiksel programlama problemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\min/\max f(\mathbf{X}) \tag{1.1}$$

$$g_i(\mathbf{X})\{\leq, \geq, =\} b_i \;, \quad i = 1,2,\ldots,m \tag{1.2}$$

$$\mathbf{X} \subset R^n. \tag{1.3}$$

Burada, (1.1) ifadesi ile amaç fonksiyonu, (1.2) ifadesi ile $m$ sayıda kısıt fonksiyonu belirtilmiştir. (1.3) ifadesi ise karar vektörü ile ilgili tanımlı kısıtları göstermektedir.

Bir d.p.p.' de amaç fonksiyonu ve kısıt fonksiyonları doğrusal olacağından, d.p.p.' nin matematiksel yapısı açık olarak

$$\begin{aligned}
&\min/\max f(\mathbf{X}) = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_nX_n \\
&a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n \{\leq, \geq, =\} b_1 \\
&a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n \{\leq, \geq, =\} b_2 \\
&. \\
&. \\
&. \\
&a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n \{\leq, \geq, =\} b_m \\
&\qquad\qquad X_1, X_2, \ldots, X_n \geq 0
\end{aligned} \tag{1.4}$$

biçiminde tanımlanır. Burada, $c_j$, $b_i$ ve $a_{ij}$, $i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$, d.p.p.' nin model parametreleri olup,

$c_j$ : $j$. karar değişkeninin fiyat parametresi, $j = 1,2,\ldots,n$

($X_j$' nin bir biriminin amaç fonksiyonuna etkisi),

$b_i$ : $i$. kısıtın sağ yan değeri (kaynak miktarı, ihtiyaç değeri), $i = 1,2,\ldots,m$

$a_{ij}$ : Bir birim $X_j$ için gerekli $i$. girdi değeri olarak tanımlanır. (1.4) ile tanımlı d.p.p. modeli genel olarak

$$\begin{aligned} &\min/\max f(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j X_j \\ &\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \{\leq, \geq, =\} b_i \quad , \quad i = 1,2,...,m \\ &\qquad X_j \geq 0 \quad , \quad j = 1,2,...,n \end{aligned} \tag{1.5}$$

biçiminde ifade edilebilir. Bir d.p.p.' nin yasal modelleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} &\max f(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j X_j \\ &\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i \quad , \quad i = 1,2,...,m \\ &\qquad X_j \geq 0 \quad , \quad j = 1,2,...,n \end{aligned} \tag{1.6}$$

ve

$$\begin{aligned} &\min f(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j X_j \\ &\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \geq b_i \quad , \quad i = 1,2,...,m \\ &\qquad X_j \geq 0 \quad , \quad j = 1,2,...,n \end{aligned} \tag{1.7}$$

(1.4) ile tanımlı d.p.p. modeli matris gösterimi ile

$$\begin{aligned} &\min/\max f(\mathbf{X}) = \mathbf{cX} \\ &\quad A\mathbf{X} \{\leq, \geq, =\} \mathbf{b} \\ &\qquad \mathbf{X} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{1.8}$$

olarak tanımlanır. Burada, $\mathbf{c} = [c_1 \; c_2 ... c_n]$ fiyat vektörü, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ teknoloji matrisi (katsayı matrisi) ve $\mathbf{b} = [b_1 \; b_2 ... b_m]$, sağ yan vektörüdür. (1.6) ve (1.7) ile tanımlı yasal biçimdeki DP modelleri matris gösterimi ile

$$
\begin{aligned}
\max\ f(\mathbf{X}) &= \mathbf{cX} \\
A\mathbf{X} &\le \mathbf{b} \\
\mathbf{X} &\ge \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\min\ f(\mathbf{X}) &= \mathbf{cX} \\
A\mathbf{X} &\ge \mathbf{b} \\
\mathbf{X} &\ge \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

biçiminde yazılır. Bir d.p.p.' nin standart biçimi açık olarak

$$
\begin{aligned}
\min/\max\ f(\mathbf{X}) &= \sum_{j=1}^{n} c_j X_j \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j &= b_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots,m \\
X_j &\ge 0 \quad\quad , \quad j = 1,2,\ldots,n
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

ifadesi ile ve matris gösterimi kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\min/\max\ f(\mathbf{X}) &= \mathbf{cX} \\
A\mathbf{X} &= \mathbf{b} \\
\mathbf{X} &\ge \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

biçiminde tanımlanır.

## 1.6. Bir Doğrusal Programlama Modelinin Sağlaması Gereken Özellikler

Bir problemi d.p.p. olarak tanımlayabilmek için (problem için "doğrusal" tanımının yapılabilmesi için), problemin bazı özellikleri sağlaması gerekir.

### 1.6.1. Oransallık

Problemin matematiksel modelinde, amaç fonksiyonunun ve eşitlik/eşitsizlik ile tanımlı kısıt fonksiyonlarının içerdiği değişkenler birinci dereceden olmalıdır. Buna göre, $c_j$ , $j = 1,2,\ldots,n$ katsayıları sabit ve $X_j$' lerin sadece birinci dereceden kuvvetlerinin yer alması gerekir. Benzer olarak, $A$ katsayılar matrisinde yer alan $a_{ij}$' ler de değişmez olmalı ve $a_{ij}$' lerin çarpanları olarak yer alan $X_j$' lerin de birinci dereceden kuvvetleri yer almalıdır. Böylece, her değişkenin amaç fonksiyonuna veya kısıt fonksiyonlarına katkısı doğrudan değişkenin seviyesi ile orantılı olacaktır.

### 1.6.2. Toplamsallık

Karar değişkenlerinin birbirine etkisi olmadığı varsayımına dayanmaktadır. Toplam katkı ve toplam kaynak kullanımının ölçüsü, ilgili karar değişkenlerinin değerlerinin (katsayılar ile birlikte) toplamlarından oluşuyorsa ve bu özellik tüm kaynaklar için geçerli ise, ele alınan problem toplamsallık özelliği taşıyor denir. Bu özellik, katkı oluşumu ve kaynak kullanımı yönü ile aynı birimlerle ifade edilebilirlik anlamındadır.

### 1.6.3. Bölünebilirlik

Problemde tanımlı karar değişkenleri, $X_j$, $j = 1,2,...,n$, her türlü reel değeri alabiliyorsa, bölünebilirlik özelliği sağlanıyor demektir. En genel anlamda, $X_j \in R$ olması demektir. Bu özellik genellikle eksi olmama veya negatif olmama olarak adlandırılmaktadır ve problemdeki bütün karar değişkenleri için $X_j \geq 0$ , $j = 1,2,...,n$ gösterimi kullanılmaktadır.

### 1.6.4. Belirlilik

Problemin tüm parametrelerinin ($\mathbf{c}, \mathbf{b}$ ve $A$) biliniyor olmasına belirlilik özelliği denir. Bu parametrelerin bilinen sabitler olduğu varsayımı ile birlikte, bu değerlerin hesaplama süresi boyunca sabit kalacağı da varsayılır. Oysaki gerçek hayatta bu parametrelerin bir kısmı gelecek zaman içinde sabit kalmamaktadır. Problemin çözümü için gelecekteki parametrelere ilişkin ancak tahmin değerleri kullanılarak hesaplama yapılabilecektir. Bu durumda da belirsizlik ortaya çıkmaktadır. Belirsizliğin etkisini gidermek üzere, d.p.p.' de duyarlılık analizleri uygulanmaktadır. Duyarlılık analizleri ile en iyi çözüm değeri elde edilmiş probleme ait parametrelerin değişim aralıkları belirlenmektedir.

Yukarıda açıklanan oransallık ve toplanabilirlik özellikleri DP için yeterlidir. Örneğin, bölünebilirlik özelliği sağlanmadığında "Tamsayılı DP", belirlilik özelliği sağlanmadığında ise "Stokastik DP" uygulanabilir.