

## KONU 2: DOĞRUSAL PROGRAMLAMA PROBLEMLERİ

### Örnek 1:

Bir boya fabrikası hem iç hem dış boya üretiyor. Boya üretiminde A ve B olmak üzere iki tip hammadde kullanılıyor. Bir günde A hammaddesinden en çok 6 ton, B hammaddesinden en çok 8 ton kullanılabilir. Günlük hammadde ihtiyacı iç ve dış boya için ton olarak aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Hammadde	Gereken Hammadde		Mevcut Miktar (ton)
	Miktarı (ton)		
	Dış Boya	İç Boya	
A	1	2	6
B	2	1	8

Bir pazar araştırması iç boyanın günlük isteminin, dış boya istemini 1 tondan fazla aşmadığını ve iç boyanın en büyük isteminin 2 ton olduğunu gösteriyor. İç boyanın toplam satış fiyatı bir tonda 2 br, dış boyanın toplam satış fiyatı bir tonda 3 br dir. Şirket toplam geliri en büyüleyecek biçimde kaç ton iç boya kaç ton dış boya üretimi yapması gerektiğini belirlemek istemektedir. Buna göre problemi, d.p.p. biçiminde modelleyiniz.

### Çözüm:

Yukarıda tanımlı problemin d.p.p. biçiminde matematiksel modelinin oluşturulması için üç temel yapı göz önünde bulundurulmalıdır. Bunlar, karar değişkenleri, kısıt fonksiyonları ve amaç fonksiyonudur.

- Karar değişkenleri: “Belirsiz olan nedir? Şirket neyi belirlemek istiyor?”

$X_1$  : Dış boyadan üretilecek miktar (ton)

$X_2$  : İç boyadan üretilecek miktar (ton)

- Kısıt fonksiyonları: “Boyalarda kullanılacak hammadde ve istemler ile ilgili koşullar nelerdir?”

$X_1 + 2X_2 \leq 6$  (A hammadde kısıtı)

$2X_1 + X_2 \leq 8$  (B hammadde kısıtı)

$X_2 - X_1 \leq 1$  (İç boyanın günlük istemi dış boyayı 1 tondan fazla aşmayacak)

$X_2 \leq 2$  (İç boyanın en büyük istemi 2 ton)

$X_1, X_2 \geq 0$

- Amaç fonksiyonu: “En büyük değeri elde edilmek istenilen gelir ile ilgili fonksiyon nedir?”

$$\max f(\mathbf{X}) = \max Z = 3X_1 + 2X_2$$

Buna göre, primal d.p.p.’nin matematiksel modeli

$$\begin{aligned} P: \max Z &= 3X_1 + 2X_2 \\ X_1 + 2X_2 &\leq 6 \\ 2X_1 + X_2 &\leq 8 \\ X_2 - X_1 &\leq 1 \\ X_2 &\leq 2 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır.

### Örnek 2:

Bir oyuncak firması, pilli ve pilsiz oyuncak arabalar üretmektedir. Firma oyuncak arabaları üretirken M1, M2 ve M3 makinelerini kullanmaktadır. Pilsiz oyuncak araba üretilirken bir günde, M1’in 2 saat, M2’nin 1 saat ve M3’ün 1 saat çalışması gerekmektedir. Pilli oyuncak araba üretilirken ise bir günde, M1 makinesinin 1 saat, M2’nin 2 saat ve M3’ün 1 saat çalışması gerekmektedir. M1, M2 ve M3’lerin aylık çalışma saatleri en fazla 180, 160 ve 100 dür. Firma üretilen bir adet pilsiz oyuncak arabadan 40 TL, bir adet pilli oyuncak arabadan ise 60 TL kar etmektedir. Oyuncak firması günlük karını en büyük yapmak için her bir oyuncak arabadan kaç tane üretmelidir? Buna göre problemi, d.p.p. biçiminde modelleyiniz.

### Çözüm:

	Makineler			
Çalışma süreleri	M1	M2	M3	Birim kar
Pilsiz oyuncak için günlük süre (sa)	2	1	1	40
Pilli oyuncak için günlük süre (sa)	1	2	1	60
Aylık toplam çalışma süresi (sa)	180	160	100	

$X_1$  : Bir günde üretilen pilsiz oyuncak araba sayısı (adet)

$X_2$  : Bir günde üretilen pilli oyuncak araba sayısı (adet)

$$\begin{aligned} P: \max Z &= 40X_1 + 60X_2 \\ 2X_1 + X_2 &\leq (180 / 30) \\ X_1 + 2X_2 &\leq (160 / 30) \\ X_1 + X_2 &\leq (100 / 30) \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

### Örnek 3:

Bir kişi sadece et, süt ve yumurta yiyerek diyet yapmaktadır. Bu kişinin günde en az 15 mg A vitamini, 30 mg C vitamini ve 10 mg D vitamini alması gerekmektedir. Buna karşılık besinlerle aldığı kolesterol 80 br/gün'ü geçmemelidir. 1 lt sütte 1 mg A, 100 mg D ve 70 br kolesterol vardır ve sütün litresi 2.25 TL dir. 1 kg ette 1 mg A, 10 mg C, 100 mg D vitamini ve 50 br kolesterol vardır. Etin kilosu 26 TL dir. Yumurtanın tanesinde 10 mg A, 10 mg C ve 10 mg D vitamini ile 120 br kolesterol bulunmakta olup, yumurtanın tanesi 0.21 TL dir.

Kişinin istediği, bu diyeti en ucuz yolla gerçekleştirmektir. Buna göre problemin DP modelini oluşturunuz.

### Çözüm:

Gıda maddesi	A	C	D	Kolesterol	Fiyat/br
Süt (lt)	1	-	100	70	2.25
Et (kg)	1	10	100	50	26
Yumurta (adet)	10	10	10	120	0.21
Gereksinim	$\geq 15$	$\geq 30$	$\geq 10$	$\leq 80$	

$X_1$  : Bir günde tüketilecek süt miktarı (lt)

$X_2$  : Bir günde tüketilecek et miktarı (kg)

$X_3$  : Bir günde tüketilecek yumurta miktarı (adet)

$$P: \min Z = 2.25X_1 + 26X_2 + 0.21X_3$$

$$X_1 + X_2 + 10X_3 \geq 15$$

$$10X_2 + 10X_3 \geq 30$$

$$100X_1 + 100X_2 + 10X_3 \geq 10$$

$$70X_1 + 50X_2 + 120X_3 \leq 80$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

### Örnek 4:

Bir firma üç değişik türde içecek üretmektedir. Bu içecekler üç değişik ham maddenin karışımından elde edilmektedir. Bu ham maddelerin elde bulunan miktarları ve bir lt fiyatları aşağıdaki gibidir.

Ham madde	Eldeki miktar (lt)	Fiyat (br/lt)
1	1500	240
2	2100	180
3	950	120

Üretilen A, B ve C içeceklerinin aşağıdaki koşulları sağlaması gerekmektedir.

A: 1'den en az %50, 2'den en çok %10

B: 1'den en az %20, 3'ten en çok %60

C: 1'den en az %10, 3'ten en çok %50

Ayrıca A, B, C içeceklerinin satış fiyatları sırasıyla 240 TL, 220 TL ve 200 TL 'dir. A tür içecekten de en az 2000 lt ek içecek üretilmesi gerekmektedir.

Verilen bilgilere göre, firmanın kazancını en büyük yapacak biçimde problemin DP modelini oluşturunuz.

### Çözüm:

$X_{ij}$  :  $j$ . içecek üretiminde kullanılan  $i$ . tür hammadde miktarı (lt),  $i=1,2,3$  ,  $j=A,B,C$

$$P: \max Z = 240(X_{1A} + X_{2A} + X_{3A}) + 220(X_{1B} + X_{2B} + X_{3B}) + 200(X_{1C} + X_{2C} + X_{3C}) \\ - 240(X_{1A} + X_{1B} + X_{1C}) - 180(X_{2A} + X_{2B} + X_{2C}) - 120(X_{3A} + X_{3B} + X_{3C})$$

$$X_{1A} + X_{1B} + X_{1C} \leq 1500$$

$$X_{2A} + X_{2B} + X_{2C} \leq 2100$$

$$X_{3A} + X_{3B} + X_{3C} \leq 950$$

$$X_{1A} \geq 0.50(X_{1A} + X_{2A} + X_{3A})$$

$$X_{2A} \leq 0.10(X_{1A} + X_{2A} + X_{3A})$$

$$X_{1B} \geq 0.20(X_{1B} + X_{2B} + X_{3B})$$

$$X_{3B} \leq 0.60(X_{1B} + X_{2B} + X_{3B})$$

$$X_{1C} \geq 0.10(X_{1C} + X_{2C} + X_{3C})$$

$$X_{3C} \leq 0.50(X_{1C} + X_{2C} + X_{3C})$$

$$X_{1A} + X_{2A} + X_{3A} \geq 2000$$

$$X_{ij} \geq 0, i=1,2,3, j=A,B,C$$

### Örnek 5:

Bir demircilik şirketinin 3 demir madeninden elde edilen cevheri işleyecek 4 demir çelik fabrikası vardır. Her demir çelik fabrikasında bir günde işlenebilen demir cevheri miktarı 1, 2, 3 ve 4 fabrikaları için sırasıyla 40, 60, 20 ve 80 kamyonudur. Ocaklardan elde edilen günlük demir cevheri miktarı ise A, B ve C ocakları için sırasıyla 100, 40 ve 60 kamyonudur. Bir kamyon demir cevherinin ocaklardan fabrikalara taşıma maliyetlerini içeren ulaştırma tablosu aşağıda verilmiştir. Buna göre, ocaklardan elde edilen demir cevherinin fabrikalarda işlenmesini sağlayan ve taşıma maliyetini en küçük yapan d.p.p.' ni formüle ediniz.

Ocakların sunumları	Fabrikaların taşıma giderleri			
	1	2	3	4
<b>A</b>	7	8	7	12
<b>B</b>	8	7	9	13
<b>C</b>	10	6	7	12

### Çözüm:

$X_{ij}$  :  $i$ . ocaktan  $j$ . fabrikaya taşınacak demir madeni miktarı,  $i = A, B, C$  ,  $j = 1, 2, 3, 4$

$$P: \min Z = 7X_{A1} + 8X_{A2} + 7X_{A3} + 12X_{A4} + 8X_{B1} + 7X_{B2} + 9X_{B3} + 13X_{B4} + 10X_{C1} + 6X_{C2} + 7X_{C3} + 12X_{C4}$$

$$X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} + X_{A4} = 100$$

$$X_{B1} + X_{B2} + X_{B3} + X_{B4} = 140$$

$$X_{C1} + X_{C2} + X_{C3} + X_{C4} = 60$$

$$X_{A1} + X_{B1} + X_{C1} = 40$$

$$X_{A2} + X_{B2} + X_{C2} = 60$$

$$X_{A3} + X_{B3} + X_{C3} = 20$$

$$X_{A4} + X_{B4} + X_{C4} = 80$$

$$X_{ij} \geq 0, i = A, B, C, j = 1, 2, 3, 4$$

### Örnek 6:

Bir yatırımcının elinde bulunan 10000 br. parasını değerlendirebileceği 4 ayrı yatırım seçeneği vardır. Her bir yatırım seçeneği ile yatırılacak en çok para miktarı sınırlandırılmıştır. Bu seçenekler ve onların finans faktörleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Yatırım seçenekleri	Getiri oranı (%)	Risk oranı (%)	Yatırım için üst sınır
<b>1</b>	50	5	5000
<b>2</b>	40	3	7000
<b>3</b>	90	9	2000
<b>4</b>	80	8	4000

Yatırımcı aşağıdaki kısıtları sağlayacak biçimde portföy yatırımlarının getirilerini en büyük yapan çözümü aramaktadır.

- Yatırımın en az %40'ı, 1. ve 2. seçeneğe ayrılmalıdır.
- 3. ve 4. seçeneğe ayrılan para oranı yatırımın %50' sinden çok olmamalı.
- Portföy için riskli yatırım, toplam yatırımın %7' sini geçmemelidir.
- Elde bulunan paranın tümü değerlendirilmelidir.

Buna göre, yukarıdaki problemi d.p.p. biçiminde tanımlayarak, matematiksel modelini oluşturunuz.

**Çözüm:**

$X_i$  :  $i$ . yatırıma ayrılan para miktarı (TL),  $i = 1, 2, 3, 4$

$$\begin{aligned} P: \max Z &= 0.50X_1 + 0.40X_2 + 0.90X_3 + 0.80X_4 \\ 0.40(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) &\leq (X_1 + X_2) \\ 0.50(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) &\leq (X_3 + X_4) \\ 0.05X_1 + 0.03X_2 + 0.09X_3 + 0.08X_4 &\leq 0.07(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) \\ X_1 + X_2 + X_3 + X_4 &= 10000 \\ X_1 &\leq 5000 \\ X_2 &\leq 7000 \\ X_3 &\leq 2000 \\ X_4 &\leq 4000 \\ X_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$