KONU 4: DOĞRUSAL PROGRAMLAMA MODELİ İÇİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ – II

4.1. Simpleks Yöntem

D.p.p.' nin bir başlangıç temel uygun çözümünden (uç noktadan) başlayarak, karşı gelen amaç fonksiyonunun değerini de göz önüne alıp, ardışık sayısal işlemlerle en iyi çözümü araştıran bir yaklaşımdır.

Uygun çözüm bölgesinin bir uç noktasından başlanarak, amaç fonksiyonunu istenilen yöne götüren uç noktalar göz önüne alınıp, komşu bir uç noktaya geçilmektedir. Böylece, modelin tüm uç noktaları işleme girmediğinden, yoğun işlem yükünden kurtulmuş olunur.

Simpleks yöntem,

- Tek bir noktada en iyi çözüm,
- Birden fazla uç noktada en iyi çözüm (seçenek çözüm),
- Sınırsız çözüm,
- Uygun olmayan çözüm,

gibi durumlara cevap vermektedir.

Bunların yanı sıra, modelin yapısında veya parametrelerinde meydana gelebilecek muhtemel değişimlerin en iyi çözümü nasıl etkileyebileceği de bu algoritma ile analiz edilebilmektedir.

Bir başlangıç temel uygun çözüm nasıl elde edilir?

Temel: Bir vektör uzayındaki vektörler $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$ olsun. Eğer, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$ vektörleri

i. Doğrusal bağımsız,

ii. Vektör uzayını yaratıyor,

ise, bu vektör uzayı için temel oluşturur.

Doğrusal bağımsızlık: Bir vektör uzayındaki vektörler $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$ için

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + ... + \alpha_n \mathbf{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{a}_i \qquad (4.1)$$

eşitliği, tüm α_i, $i = 1,2,...,n$ için sağlanıyorsa, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$ vektörleri doğrusal bağımsızdır. En az bir $\alpha_i \neq 0$, $i = 1,2,...,n$ ise, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$ vektörleri doğrusal bağımlıdır.

Vektör uzayını yaratma: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ bir vektör uzayının vektörleri olsun. Eğer, vektör uzayındaki her vektör, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektörlerinin doğrusal bileşimi olarak gösterilebiliyorsa bu vektörler vektör uzayını yaratıyor denir.

Örnek 1: $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}'$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 0 \end{bmatrix}'$ ve $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}'$ vektörleri E^3 için bir temel midir?

Çözüm: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ ve $\mathbf{a}_3$' ün doğrusal bağımsız olması ve vektör uzayını yaratması gerekir. Bunun yerine, $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$ olmak üzere, $A\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b}$ denklem sisteminde A^{-1}' in bulunması yeterlidir.

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \alpha_3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$$
$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}' + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 & 9 & 0 \end{bmatrix}' + \alpha_3 \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = b_1 \\ 2\alpha_1 + 9\alpha_2 + 3\alpha_3 = b_2 \\ \alpha_1 + 4\alpha_3 = b_3 \end{array}\right\} \Rightarrow A\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b} \text{ olacak biçimde } \boldsymbol{\alpha} \text{ vektörü bulunmalı.}$$

Bunun için A^{-1}' in bulunması yeterlidir.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ise, $|A| = -1 \neq 0$ olup, A tersinirdir. Buna göre, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ ve $\mathbf{a}_3$ doğrusal bağımsız vektörler olup, E^3 için bir temel oluşturur.

4.1.1. Doğrusal Programlama Problemlerinin Standart Biçimi

Bir d.p.p.' ne simpleks algoritmasını uygulayabilmek için, öncelikli olarak verilen d.p.p.' i mutlaka standartlaştırılmalıdır. Buna göre standart haldeki bir d.p.p. açık olarak

$$\begin{array}{ll} \text{min/max } f(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j X_j & \\ \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots,m & \qquad (4.2) \\ \quad X_j \geq 0 \qquad\quad , \quad j = 1,2,\ldots,n & \end{array}$$

biçiminde tanımlanır. Matris gösterimi ile

$$\begin{aligned}\min/\max\ f(\mathbf{X}) &= \mathbf{cX}\\ A\mathbf{X} &= \mathbf{b}\\ \mathbf{X} &\geq \mathbf{0}\end{aligned} \tag{4.3}$$

biçiminde olur.

Standart biçime dönüştürme işleminde,

- Tüm kısıt fonksiyonları eşitlik biçiminde olmalıdır.
- Sağ yan değerler, b_i, $i=1,2,...,m$, negatif değildir.
- Tüm değişkenler negatif olmama kısıtlayıcılarını sağlar.
- Amaç fonksiyonu en büyükleme veya en küçükleme biçimindedir.

Standartlaştırma işlemi için,

- Kısıtlar "$\leq$" biçiminde ise, kısıtlara bir değişken eklenir. Bu değişkene "gevşek değişken" denir.
- Kısıtlar "$\geq$" biçiminde ise, kısıtlardan bir değişken çıkarılır. Bu değişkene "fazla değişken" denir.
- Kısıtlar "$=$" biçiminde ise, kısıtlarda bir değişiklik yapılmaz.

Burada, gevşek veya fazla değişken kullanılmayan veya fazla gelen kapasiteyi gösterir. Bu değişkenlerin maliyetleri sıfırdır ($c_G = c_F = 0$).

Örnek 2:

$$\begin{aligned} P:\ \ \max\ Z &= 2X_1 + 4X_2\\ 3X_1 + 5X_2 &\leq 6\\ -2X_1 + X_2 &\geq -2\\ X_1 + 3X_2 &= 8\\ 3X_1 + 2X_2 &\geq 4\\ X_1, X_2 &\geq 0\end{aligned}$$

biçiminde tanımlı d.p.p.' ni standart halde gösteriniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} P:\ \ \max\ Z &= 2X_1 + 4X_2\\ 3X_1 + 5X_2 + X_3 &= 6\\ 2X_1 - X_2 + X_4 &= 2\\ X_1 + 3X_2 &= 8\\ 3X_1 + 2X_2 - X_5 &= 4\\ X_i \geq 0\ ,\ i &= 1,2,...,5\end{aligned}$$

4.1.2. Eşanlı Doğrusal Denklem Sistemi

(4.3) ifadesi ile tanımlı d.p.p.' deki kısıt sistemi $A\mathbf{X}=\mathbf{b}$' nin çözümü için iki durum söz konusudur.

$$A\mathbf{X}=\mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ . \\ . \\ . \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

$A_{ek}=\left[A:\mathbf{b}\right]_{m\times(n+1)}$: Eklemeli matris

<u>Durum 1:</u> $Rank\left(A_{ek}\right)>Rank\left(A\right)$ ise, $A\mathbf{X}=\mathbf{b}$ denklem sisteminin bir çözümü yoktur.

<u>Durum 2:</u> $Rank\left(A_{ek}\right)=Rank\left(A\right)=k$ ise,

(i) $k=n$ ise, tek çözüm vardır.

(ii) $n>k$ ise, sınırsız çözüm vardır.

$$A_{ek}=\left[A:\mathbf{b}\right]_{m\times(n+1)}=\begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{b}_1 \\ A_2 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \;,\; A_1: k\times n \;,\; A_2:(m-k)\times n \;,\; \mathbf{b}_1: k\times 1 \;,\; \mathbf{b}_2:(m-k)\times 1$$

olmak üzere, $A_1\mathbf{X}=\mathbf{b}_1$ doğrusal bağımsız kısıt sistemini, $A_2\mathbf{X}=\mathbf{b}_2$ doğrusal bağımlı kısıt sistemini tanımlasın. Burada, eğer $\mathbf{X}$ vektörü, $A_1\mathbf{X}=\mathbf{b}_1$ sistemini sağlıyorsa, $A_2\mathbf{X}=\mathbf{b}_2$ sistemini de sağlar. O halde, $A_2\mathbf{X}=\mathbf{b}_2$ doğrusal bağımlı kısıtlarını göz ardı ederek, $A_1\mathbf{X}=\mathbf{b}_1$ doğrusal bağımsız kısıtları ele alınsın. $Rank\left(A_1\right)=k$ olduğundan, A_1' in k tane bağımsız kolonu seçilebilir.

$A_1=\left[B:N\right]$ olmak üzere, B, $k\times k$ boyutlu temel matris, N, $k\times(n-k)$ boyutlu temel olmayan matris olsun. $\mathbf{X}=\left[\mathbf{X}_B\;\mathbf{X}_N\right]$ karar değişkenleri vektöründe, $\mathbf{X}_B$, temel değişkenler vektörü, $\mathbf{X}_N$, temel dışı değişkenler vektörü olarak tanımlansın. Buna göre, doğrusal bağımsız kısıt sistemi için

$$A_1\mathbf{X}=\mathbf{b}_1$$
$$\begin{bmatrix} B & N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{X}_B \\ \mathbf{X}_N \end{bmatrix}=\mathbf{b}_1$$
$$B\mathbf{X}_B+N\mathbf{X}_N=\mathbf{b}_1$$
$$B^{-1}B\mathbf{X}_B+B^{-1}N\mathbf{X}_N=B^{-1}\mathbf{b}_1$$

elde edilir. Buradan

$$\mathbf{X}_B=B^{-1}\mathbf{b}_1-B^{-1}N\mathbf{X}_N \tag{4.4}$$

olur. (4.4) eşitliğinde aşağıdaki durumlar ile karşılaşılır.

- $k=n$ olduğunda, $A_1\mathbf{X}=\mathbf{b}_1$ sisteminin $\mathbf{X}_B=B^{-1}\mathbf{b}_1$' den bulunan tek çözümü vardır. Dolayısıyla, tek çözüm uygun çözüm olacaktır. Bu çözüme temel çözüm denir.

  $\mathbf{X}_B=B^{-1}\mathbf{b}>0\Rightarrow$Temel uygun çözümdür.

  $\mathbf{X}_B=B^{-1}\mathbf{b}<0\Rightarrow$ Temel uygun çözüm değildir.

  $\mathbf{X}_B=B^{-1}\mathbf{b}=0\Rightarrow$ Bozulmuş temel uygun çözümdür.

- $n>k$ olduğunda, k tane çözüme ulaşılır. $(n-k)$ tane değişkene keyfi değerler vermek gerekir. Verilen her keyfi değere göre çözüm değişecektir. Bu durumda, sınırsız çözüme ulaşılır.

4.1.3. Temel Çözümler

$A\mathbf{X}=\mathbf{b}$, n bilinmeyenli, m doğrusal kısıttan oluşan bir denklem sistemi olsun. Burada, $n>m$ dir. A matrisinden, $m\times m$ boyutlu tekil olmayan (tersinir) B matrisi seçilir. Sıfırdan farklı olan m tane değişken temel değişkendir. Elde edilebilecek olası temel çözümler, $\binom{n}{m}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ sayıda olacaktır.

Örnek 3:

$$\begin{aligned}
P:\ \ \max\ Z&=2X_1+3X_2+4X_3\\
2X_1+3X_2+2X_3&=3\\
4X_1+2X_2+6X_3&=5\\
X_i\geq 0\ ,\ i&=1,2,3
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlı d.p.p.' nin olası temel uygun çözümlerini elde ediniz.

Çözüm:

$\binom{3}{2} = 3$ tane olası temel uygun çözüm vardır.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ olmak üzere,

i. $B = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ **,** $\mathbf{X}_B = [X_1 \ X_2]$, $X_N = X_3$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 & 3/8 \\ 1/2 & -1/4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_B = B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1/4 & 3/8 \\ 1/2 & -1/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/8 \\ 1/4 \end{bmatrix} \begin{matrix} >0 \\ >0 \end{matrix}$$

olup, $\mathbf{X}_B = [X_1 \ X_2]$ temel uygun çözümdür. Amaç fonksiyon değeri,

$$Z_1 = 2 \times \frac{9}{8} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times 0 = 3 .$$

ii. $B = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_3] = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ **,** $\mathbf{X}_B = [X_1 \ X_3]$ **,** $X_N = X_2$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_B = B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \begin{matrix} >0 \\ <0 \end{matrix}$$

olup, $\mathbf{X}_B = [X_1 \ X_3]$ temel uygun çözüm değildir. Bu nedenle, amaç fonksiyon değeri hesaplanamaz.

iii. $B = [\mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ **,** $\mathbf{X}_B = [X_2 \ X_3]$ **,** $X_N = X_1$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/7 & -1/7 \\ -1/7 & 3/14 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_B = B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3/7 & -1/7 \\ -1/7 & 3/14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/7 \\ 9/14 \end{bmatrix} \begin{matrix} >0 \\ >0 \end{matrix}$$

olup, $\mathbf{X}_B = \begin{bmatrix} X_2 & X_3 \end{bmatrix}$ temel uygun çözümdür. Amaç fonksiyon değeri,

$$Z_3 = 2\times 0 + 3\times\frac{4}{7} + 4\times\frac{9}{14} = 4.2857.$$

Burada, $Z_3 > Z_1$ olduğundan, optimal çözüm değeri $\mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} 0 & 4/7 & 9/14 \end{bmatrix}'$ olur.

Bir d.p.p.' nin en iyi çözüm değerinin elde edilmesi için izlenen bu yol, etkin olmayan bir yoldur. Çünkü, değişken sayısının artması durumunda temel çözüm sayısı da artar. Ayrıca, temel çözümlerin incelenmesi problemin sınırsız çözümünün olup olmadığını belirlemeye yetmez. Bu nedenle, uç noktalar arasında yinelemeli bir yöntem olan Simpleks yöntem ile en iyi uç nokta bulunmalıdır.

4.2. Simpleks Algoritması

$$\begin{aligned} \min\ & f(\mathbf{X}) = \mathbf{cX} \\ & A\mathbf{X} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{X} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.5}$$

biçiminde tanımlı bir d.p.p.' nin en iyi çözümünün elde edilmesi amacıyla uygulanacak Simpleks yönteminin algoritmik adımları aşağıdaki gibidir:

Adım 1: Bir B temeli seçilerek, B^{-1} hesaplanır. Burada, işlem kolaylığı bakımından B temelinin seçilmesinde birim matrise yer verilir, $B = I$.

Adım 2: B temeline ilişkin bir başlangıç temel uygun çözüm belirlenir, $\mathbf{X}_B = B^{-1}\mathbf{b}$. $X_N = \mathbf{0}$ alınır. $Z_B = \mathbf{c}_B\mathbf{X}_B$ hesaplanır.

Adım 3: Adım 2' de bulunan amaç fonksiyonu değeri Z_B' nin en küçük olup olmadığını test etmek için, temel dışı değişkenlere ilişkin $Z_j - c_j$ değeri hesaplanır. Burada,

$$Z_j - c_j = \mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{a}_j - c_j \tag{4.6}$$

olup, "en iyilik ölçütü" olarak adlandırılır.

Adım 4: (4.5) ifadesi ile tanımlı bir en küçükleme problemi için hesaplanan tüm $Z_j - c_j \leq 0$ ise, optimal çözüme ulaşılmıştır. Son bulunan çözüm en iyi çözümdür. Eğer, en az bir $Z_j - c_j > 0$ ise,

$$Z_k - c_k = \max\left\{Z_j - c_j : \left(Z_j - c_j\right) > 0\right\} \tag{4.7}$$

ölçütüne göre temele alınacak vektör belirlenir. Bu durumda $\mathbf{a}_k$ vektörü temele alınır.

Adım 5: $\mathbf{a}_k$ vektörüne ilişkin $\mathbf{y}_k$ değerleri, $\mathbf{y}_k = B^{-1}\mathbf{a}_k$, hesaplanır. Burada,

- $\mathbf{y}_k \le 0$ ise, sınırsız çözüme ulaşılır.
- $\mathbf{y}_k > 0$ ise, $\mathbf{y}_k$' nın en az bir elemanı sıfırdan farklı oluyorsa

$$\frac{X_{Br}}{y_{rk}} = \min\left\{\frac{X_{Bi}}{y_{ik}} : y_{ik} > 0\right\} \tag{4.8}$$

ölçütüne göre, temelden çıkacak değişken belirlenir. Yeni çözüm uygun çözüm olur ve devam edilir.

Adım 6: r. vektör temelden çıkarılır, yerine $\mathbf{a}_k$ vektörü alınır. Belirlenen yeni temel için de $\mathbf{X}_B = B^{-1}\mathbf{b}$ ve $Z_B = \mathbf{c}_B\mathbf{X}_B$ hesaplanır. Adım 3' ten devam edilir.

NOT: (4.5) ifadesi ile tanımlı d.p.p.

$$\begin{aligned} \max\ & f(\mathbf{X}) = \mathbf{cX} \\ & A\mathbf{X} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{X} \ge \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.9}$$

biçiminde tanımlı olduğunda, Adım 3' te, (4.6) eşitliği ile tanımlanan en iyilik ölçütü, temel dışı değişkenlere ilişkin $Z_j - c_j$ değerleri için

$$Z_j - c_j = \mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{a}_j - c_j \ge 0 \tag{4.10}$$

biçimindedir. Adım 4' te (4.7) eşitliği ile verilen temelden çıkacak değişkeni belirlemede kullanılan ölçüt ise,

$$Z_k - c_k = \min\left\{Z_j - c_j : \left(Z_j - c_j\right) < 0\right\} \tag{4.11}$$

olarak tanımlanır.

Örnek 4:

$$\begin{aligned} P:\ \min\ & Z = -X_1 - X_2 \\ & X_1 + X_2 \le 6 \\ & -X_1 + 2X_2 \le 8 \\ & X_1, X_2 \ge 0 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı d.p.p. için, simpleks algoritmasını kullanarak en iyi çözüm değerini elde ediniz.

Çözüm:

Verilen primal problem standart biçime getirilir.

$$
\begin{aligned}
P:\ \ \min\ Z &= -X_1 - X_2 + 0X_3 + 0X_4 \\
X_1 + X_2 + X_3 &= 6 \\
-X_1 + 2X_2 + X_4 &= 8 \\
X_i \geq 0\ ,\ i &= 1,2,3,4
\end{aligned}
$$

Burada, A katsayılar matrisi ve sağ yan değerler vektörü

$$A = [\mathbf{a}_1\ \ \mathbf{a}_2\ \ \mathbf{a}_3\ \ \mathbf{a}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\quad ,\quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

olur.

I. Yineleme:

- $B = [\mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1}$ **,** $\mathbf{X}_B = [X_3\ X_4]$ **,** $\mathbf{X}_N = [X_1\ X_2] = \mathbf{0}$

- $\mathbf{X}_B = B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}\begin{matrix} >0 \\ >0 \end{matrix}\quad ,\quad Z_B = \mathbf{c}_B\mathbf{X}_B = [0\ \ 0]\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = 0$

- Bulunan amaç fonksiyon değeri optimal mi? Temel dışı değişkenler, X_1 ve X_2' ye ilişkin $Z_j - c_j$ değerleri hesaplanır.

  $$Z_1 - c_1 = \mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{a}_1 - c_1 = [0\ \ 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - (-1) = 1$$

  $$Z_2 - c_2 = \mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{a}_2 - c_2 = [0\ \ 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - (-1) = 1$$

- $Z_k - c_k = \max\left\{Z_j - c_j\ :\ (Z_j - c_j) > 0\right\} = \max\{1, 1\} = 1$

  olur. Bu durumda, herhangi bir $\mathbf{a}$ vektörü temele alınabilir. $\mathbf{a}_2$ vektörünün temele alındığı kabul edilsin.

- $\mathbf{y}_2 = B^{-1}\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{matrix} >0 \\ >0 \end{matrix}$ olduğundan,

  $\dfrac{X_{Br}}{y_{rk}} = \min\left\{\dfrac{6}{1}, \dfrac{8}{2}\right\} = 4$ olur. Buna göre, temelin 2. elemanı X_4 temelden çıkar.

- Yeni temel, $B = [\mathbf{a}_3\ \mathbf{a}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ olur. II. Yinelemeye geçilir.

II. Yineleme:

- $\mathbf{X}_B = B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} >0 \\ >0 \end{matrix}$, $\mathbf{X}_B = [X_3 \;\; X_2]$ **,** $\mathbf{X}_N = [X_1 \;\; X_4] = \mathbf{0}$

  $Z_B = \mathbf{c}_B \mathbf{X}_B = [0 \;\; -1] \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = -4$

- Bulunan yeni amaç fonksiyon değeri optimal mi? Temel dışı değişkenler, X_1 ve X_4' e ilişkin $Z_j - c_j$ değerleri hesaplanır.

  $$Z_1 - c_1 = \mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{a}_1 - c_1 = [0 \;\; -1] \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - (-1) = 3/2$$

  $$Z_4 - c_4 = \mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{a}_4 - c_4 = [0 \;\; -1] \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - (-1) = -1/2$$

- $Z_1 - c_1 = 3/2 > 0$ olduğundan, $\mathbf{a}_1$ vektörü temele alınır.

- $\mathbf{y}_1 = B^{-1}\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \begin{matrix} >0 \\ <0 \end{matrix}$

  Buna göre, temelin 1. elemanı X_3 temelden çıkar.

- Yeni temel, $B = [\mathbf{a}_1 \;\; \mathbf{a}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ olur. III. Yinelemeye geçilir.

III. Yineleme:

- $\mathbf{X}_B = B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 14/3 \end{bmatrix} \begin{matrix} >0 \\ >0 \end{matrix}$, $\mathbf{X}_B = [X_1 \;\; X_2]$ **,** $\mathbf{X}_N = [X_3 \;\; X_4] = \mathbf{0}$

- $Z_B = \mathbf{c}_B \mathbf{X}_B = [-1 \;\; -1] \begin{bmatrix} 4/3 \\ 14/3 \end{bmatrix} = -6$

- Bulunan yeni amaç fonksiyon değeri optimal mi? Temel dışı değişkenler, X_3 ve X_4' e ilişkin $Z_j - c_j$ değerleri hesaplanır.

  $$Z_3 - c_3 = \mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{a}_3 - c_3 = [-1 \;\; -1] \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -1$$

  $$Z_4 - c_4 = \mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{a}_4 - c_4 = [-1 \;\; -1] \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 0$$

- Tanımlanan d.p.p. için hesaplanan tüm $Z_j - c_j \leq 0$ olduğundan, optimal çözüme ulaşılmıştır. Son bulunan çözüm, en iyi çözümdür.

$$\mathbf{X}^* = [X_1 \;\; X_2] = [4/3 \quad 14/3] \quad , \quad Z^* = -6$$

Burada, $Z_4 - c_4 = 0$ olması seçenek çözüm olduğunu gösterir. Bu durumda tüm olası noktaları bulabilmek için $\mathbf{a}_4$ vektörü temele alınsın.

$$\mathbf{y}_4 = B^{-1}\mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \begin{matrix} <0 \\ >0 \end{matrix}$$

Buna göre, temelin 2. elemanı X_2 temelden çıkar.

Yeni temel, $B = [\mathbf{a}_1 \;\; \mathbf{a}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ olur.

$$\mathbf{X}_B = B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \end{bmatrix} \begin{matrix} >0 \\ >0 \end{matrix} \quad , \quad \mathbf{X}_B = [X_1 \;\; X_4] \quad , \quad \mathbf{X}_N = [X_2 \;\; X_3] = \mathbf{0}$$

$\mathbf{X}^* = [X_1 \;\; X_2] = [6 \quad 0]$, $Z^* = -6$ olup, verilen d.p.p. için alternatif çözüm elde edilmiştir.

Bu iki seçenek çözümün dışbükey bileşimleri ile iki seçenek çözüm arasındaki doğru parçası üzerinde tanımlı diğer seçenek çözümler de elde edilebilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \lambda_1 \mathbf{X}_1 + \lambda_2 \mathbf{X}_2 \\ &= \lambda \begin{bmatrix} 4/3 \\ 14/3 \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda(4/3) + (1-\lambda)6 \\ \lambda(14/3) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur. Buna göre,

$$\begin{aligned} &\lambda = 0 \Rightarrow \mathbf{X} = [6 \quad 0] \; , \; Z^* = -6 \\ &\lambda = 1 \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{X}_1 = [4/3 \quad 14/3] \; , \; Z^* = -6 \\ &\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbf{X} = [11/3 \quad 7/3] \; , \; Z^* = -6 \end{aligned}$$

bulunur.

4.3. Simpleks Tablo

Simpleks algoritmasında en iyi çözüm, verilen d.p.p. için bir temel uygun çözümden başlanarak, ardışık sayısal işlemlerle araştırılır. Bu işlemler, temel değişken vektöründe olmadığı halde amaç fonksiyonunu istenilen yönde etkileyen değişkenleri araştırmak ve temel değişken vektörüne uygun bir değişkenin alınması biçiminde işlemleri yinelenmektedir.

Ardışık sayısal işlemlerde, temele alınacak ve temelden çıkacak değişkenleri belirlemede kolaylık sağlaması, ayrıca en iyi çözüm için “yok”, “tek”, “birden fazla”, “sınırsız” sonuçlarının rahatlıkla elde edilebilmesi amacıyla Simpleks algoritmasından yararlanılarak, tablo kullanılarak çözüm yöntemi geliştirilmiştir. Bu amaçla kullanılan tablolara “Simpleks Tablosu” denilmektedir.

En iyi çözümü elde edilmek istenilen d.p.p.

$$\begin{aligned} \min\ Z &= \mathbf{c}\mathbf{X} \\ A\mathbf{X} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{X} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.12}$$

biçiminde standart halde tanımlı olsun. Bu probleme ilişkin simpleks tablosu aşağıdaki gibidir.

			c_1	c_2	...	c_k	...	c_n
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	...	$\mathbf{y}_k$	...	$\mathbf{y}_n$
C_{B1}	X_1	X_{B1}	y_{11}	y_{12}	...	y_{1k}	...	y_{1n}
C_{B2}	X_2	X_{B2}	y_{21}	y_{22}	...	y_{2k}	...	y_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
C_{Br}	X_r	X_{Br}	y_{r1}	y_{r2}	...	y_{rk}	...	y_{rn}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
C_{Bm}	X_m	X_{Bm}	y_{m1}	y_{m2}	...	y_{mk}	...	y_{mn}
		Z	$Z_1 - c_1$	$Z_2 - c_2$	...	$Z_k - c_k$	...	$Z_n - c_n$

Burada,

C_B : Temelde yer alan değişkenlere ilişkin fiyat kolonudur.

T_V : Temelde yer alan değişkenlerin kolonudur.

$\mathbf{X}_B$: Temel uygun çözüm değeri kolonudur.

Z : Amaç fonksiyonu değeridir.

$\mathbf{y}_j$: Her bir değişkene ilişkin $\mathbf{y}_j = B^{-1}\mathbf{a}_j$, $j = 1,2,...,n$ ifadesi ile hesaplanır.

c_j : Standart biçimde tanımlı d.p.p.'ne ilişkin değişkenlere ait fiyat değerleridir.

$Z_j - c_j$: En iyilik ölçütü kontrol edilir, $j = 1,2,...,n$.

(En küçükleme probleminde $Z_j - c_j \leq 0$ ve en büyükleme probleminde $Z_j - c_j \geq 0$ olması istenir.)

(6.1) ifadesi ile tanımlı d.p.p.' de gerekli ayrışımlar yapılarak, temel değişkenlerin temel dışı değişkenler biçiminde ifade edilebileceği simpleks algoritmasında

$$\mathbf{X}_B = B^{-1}\mathbf{b} - B^{-1}N\mathbf{X}_N \tag{4.13}$$

biçiminde gösterildi. $\mathbf{X}_N = \mathbf{0}$ olduğundan, $\mathbf{X}_B = B^{-1}\mathbf{b}$ dir. $\mathbf{X}_B \geq \mathbf{0}$ ise, bir temel uygun çözüm (uç nokta) elde edilir.

$$\begin{gathered} Z - \mathbf{cX} = 0 \\ Z - \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B & \mathbf{c}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_B \\ \mathbf{X}_N \end{bmatrix} = 0 \\ Z - \mathbf{c}_B\mathbf{X}_B - \mathbf{c}_N\mathbf{X}_N = 0 \\ Z - \mathbf{c}_B\left(B^{-1}\mathbf{b} - B^{-1}N\mathbf{X}_N\right) - \mathbf{c}_N\mathbf{X}_N = 0 \end{gathered} \tag{4.14}$$

olup,

$$Z = \mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{b} - \left(\mathbf{c}_B B^{-1}N - \mathbf{c}_N\right)\mathbf{X}_N \tag{4.15}$$

dır. Böylece, amaç fonksiyonu temel dışı değişkenlerin fonksiyonu olarak yazılmış olur. $\mathbf{X}_N = \mathbf{0}$ olduğundan, amaç fonksiyon değeri

$$Z = \mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{b} \tag{4.16}$$

olur.

Simpleks tablo ile yapılacak en iyileme çözümlemesi aşağıdaki adımlar ile ifade edilebilir.

Adım 1: Başlangıç simpleks tablo oluşturulur.

(4.12) ifadesi ile verilen d.p.p. modeli, uygun işlemlerden sonra sağ yan değerler için $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ ve A katsayılar matrisinde bir birim matris olacak biçimde düzenlenir. Birim matrise karşı gelen değişkenler, temel değişkenler olmak üzere simpleks tablo düzenlenir. Tabloda temel dışı değişkenlere karşı gelen değerler sıfır olmalıdır. (4.12) ile tanımlı d.p.p. modelinde kısıtlar eşitlik biçiminde iken A katsayılar matrisinde bir birim matris yok ise, modele yeni değişken eklenmesi (yapay değişken kullanılması) ile birim matris oluşturulur. Bu durumda, "Charnes'in M Yöntemi (Büyük M Yöntemi)" kullanılır.

Adım 2: En iyilik ölçütünün sağlanıp sağlanmadığına bakılır.

(4.12) ile tanımlı d.p.p. modeli için simpleks tablonun alt satırında yer alan tüm $z_j - c_j \leq 0$ ise, en iyilik ölçütü sağlanmıştır. Tabloda bulunan temel değişkenlerin aldığı değerler en iyi çözüm değerini verir. En az bir temel dışı değişkene ilişkin $z_j - c_j = 0$ ise, birden fazla uç noktada en iyi çözüm var demektir (seçenek/alternatif çözüm). En iyilik koşulları sağlanmıyor ise, Adım 3' e geçilir.

Adım 3: Temele alınacak değişken belirlenir.

$Z_k - c_k = \max\left\{Z_j - c_j : \left(Z_j - c_j\right) > 0\right\}$ ölçütü kullanılarak temele alınacak değişken belirlenir. Bu değişken, X_k olsun. X_k değişkeninin bulunduğu kolon seçilerek, Adım 4' e geçilir. Birden fazla değişkenin $Z_j - c_j$ değerlerinin aynı olması durumunda bunlardan keyfi biri seçilir.

Adım 4: Temelden çıkacak değişken belirlenir.

X_k değişkeninin bulunduğu kolon $\mathbf{y}_k$ olup,

$$\mathbf{y}_k = \left[y_{1k} \;\; y_{2k} \;\; .... \; y_{rk} \cdots y_{mk}\right]'$$

dır. Temeldeki değişkenlerin aldığı değerler $\mathbf{X}_B$' ye bağlı olarak

$$u_k = y_{1k}X_{B1} + y_{2k}X_{B2} + ... + y_{rk}X_{Br} + ... + y_{mk}X_{Bm}$$

$$\begin{aligned}
y_{rk}X_{Br} &= u_k - y_{1k}X_{B1} - y_{2k}X_{B2} ... - y_{mk}X_{Bm} \\
&= u_k - \sum_{i=1,\, i\neq r}^{m} y_{ik}X_{Bi}
\end{aligned}$$

$$X_{Br} = \frac{1}{y_{rk}}u_k - \frac{1}{y_{rk}}\sum_{i=1,\, i\neq r}^{m} y_{ik}X_{Bi} \quad , \quad y_{rk} > 0$$

$$\begin{aligned}
u_j &= y_{1j}X_{B1} + y_{2j}X_{B2} + ... + y_{rj}X_{Br} + ... + y_{mj}X_{Bm} \\
&= y_{1j}X_{B1} + y_{2j}X_{B2} + ... + y_{rj}\left(\frac{1}{y_{rk}}u_k - \frac{1}{y_{rk}}\sum_{i=1,\, i\neq r}^{m} y_{ik}X_{Bi}\right) + ... + y_{mj}X_{Bm} \\
&= \sum_{i=1,\, i\neq r}^{m} y_{ij}X_{Bi} + y_{rj}\left(-\sum_{i=1,\, i\neq r}^{m} \frac{y_{ik}}{y_{rk}}X_{Bi} + \frac{1}{y_{rk}}u_k\right) \\
&= \sum_{i=1,\, i\neq r}^{m} \left(y_{ij} - y_{rj}\frac{y_{ik}}{y_{rk}}\right)X_{Bi} + \frac{y_{rj}}{y_{rk}}u_k
\end{aligned}$$

Yeni değerler:

$$\begin{cases} \hat{X}_{Bi} = X_{Bi} & , \quad i \neq r \\ \hat{X}_{Br} = u_k & , \quad i = r \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{y}_{ij} = y_{ij} - y_{rj}\dfrac{y_{ik}}{y_{rk}} & , \quad i \neq r \\ \quad \hat{y}_{rj} = \dfrac{y_{rj}}{y_{rk}} & , \quad i = r \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \hat{Z}_j - c_j &= \mathbf{c}_B \hat{\mathbf{y}}_j - c_j \\ &= \left(\sum_{i=1,\, i\neq r}^{m} c_{Bi}\hat{y}_{ij} + c_{Br}\hat{y}_{rj} \right) - c_j \\ &= \sum_{i=1,\, i\neq r}^{m} c_{Bi}\left(y_{ij} - y_{rj}\frac{y_{ik}}{y_{rk}} \right) + \frac{y_{rj}}{y_{rk}} c_{Br} - c_j \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \hat{c}_{Bi} = c_{Bi} & , \quad i \neq r \\ \hat{c}_{Br} = c_k & , \quad i = r \end{cases}$$

Eğer, X_k değişkeninin bulunduğu kolon için $\mathbf{y}_k \leq 0$ ise, d.p.p.' nin sınırsız çözüm durumu söz konusudur.

Burada, y_{rk} pivot eleman olarak adlandırılır. Oluşturulacak yeni simpleks tablo aşağıdaki gibidir:

			c_1	...	c_k	...	c_n
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	...	$\mathbf{y}_k$	...	$\mathbf{y}_n$
C_{B1}	X_1	$X_{B1} - y_{1k}\dfrac{X_{Br}}{y_{rk}}$	$y_{11} - y_{r1}\dfrac{y_{1k}}{y_{rk}}$	...	0	...	$y_{1n} - y_{rn}\dfrac{y_{1k}}{y_{rk}}$
C_{B2}	X_2	$X_{B2} - y_{2k}\dfrac{X_{Br}}{y_{rk}}$	$y_{21} - y_{r1}\dfrac{y_{2k}}{y_{rk}}$	...	0	...	$y_{2n} - y_{rn}\dfrac{y_{2k}}{y_{rk}}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
C_{Br}	X_r	$\dfrac{X_{Br}}{y_{rk}}$	$\dfrac{y_{r1}}{y_{rk}}$	...	1	...	$\dfrac{y_{rn}}{y_{rk}}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
C_{Bm}	X_m	$X_{Bm} - y_{mk}\dfrac{X_{Br}}{y_{rk}}$	$y_{m1} - y_{r1}\dfrac{y_{mk}}{y_{rk}}$	...	0	...	$y_{mn} - y_{rn}\dfrac{y_{mk}}{y_{rk}}$
		$Z - \dfrac{X_{Br}}{y_{rk}}(z_k - c_k)$	$(Z_1 - c_1) - \dfrac{y_{r1}}{y_{rk}}(Z_k - c_k)$	...	0	...	$(Z_n - c_n) - \dfrac{y_{rn}}{y_{rk}}(Z_k - c_k)$

Simpleks tablosunda yeni satır işlemleri yapılarak, tablo yukarıdaki biçimde düzenlenir.

Adım 2' ye dönülür.

Algoritmanın 1. Adımı bir defa gerçekleştirilerek, işlemler Adım 2 - Adım 5 arasında en iyilik ölçütü sağlanıncaya kadar tekrarlanır.

Örnek 5:

$$
\begin{aligned}
P:\ \ & \max\ Z = 3X_1 + 2X_2 \\
& 2X_1 + 3X_2 \le 12 \\
& 6X_1 + 3X_2 \le 24 \\
& \quad X_1, X_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlı d.p.p.' nin simpleks tablo ile en iyi çözümünü bulunuz.

Çözüm:

Verilen primal d.p.p. standart hale getirilir.

$$
\begin{aligned}
P:\ \ & \max\ Z = 3X_1 + 2X_2 + 0X_3 + 0X_4 \\
& 2X_1 + 3X_2 + X_3 = 12 \\
& 6X_1 + 3X_2 + X_4 = 24 \\
& X_1, X_2, X_3, X_4 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \end{bmatrix}$$

$$B = [\mathbf{a}_3\ \ \mathbf{a}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Tablo-I			3	2	0	0	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	
0	X_3	12	2	3	1	0	
0	X_4	24	6	3	0	1	
		$Z=0$	-3	-2	0	0	≥ 0 olmalı

X_1 değişkeni temele alınır.

$\min\left\{\frac{12}{2}, \frac{24}{6}\right\} = 4$ ölçütüne göre, X_4 değişkeni temelden çıkar.

Burada, 6 pivot elemandır.

Tablo- II			3	2	0	0	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	
0	X_3	4	0	2	1	-1/3	
3	X_1	4	1	1/2	0	1/6	
		$Z=12$	0	-1/2	0	1/2	≥ 0 olmalı

X_2 değişkeni temele alınır.

$\min\left\{\frac{4}{2}, \frac{4}{1/2}\right\}=2$ ölçütüne göre, X_3 değişkeni temelden çıkar.

Burada, 2 pivot elemandır.

Tablo- III			3	2	0	0	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	
2	X_2	2	0	1	1/2	-1/6	
3	X_1	3	1	0	-1/4	1/4	
		$Z=13$	0	0	1/4	5/12	≥ 0 sağlandı

Tablo-III' te görüldüğü gibi en iyilik ölçütü sağlandı.

$\mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ve $Z^* = 13$

bulunur.

4.4. Charnes' in M Yöntemi (Büyük M Yöntemi)

Standart biçime dönüştürülmüş

$$\begin{aligned} &\min/\max\ Z = \mathbf{cX} \\ &A\mathbf{X} = \mathbf{b} \\ &\mathbf{X} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.17}$$

biçiminde tanımlı d.p.p.' nin en iyi çözüm değerinin elde edilmesinde, simpleks tablo ile çözümleme yapılmak istensin. A katsayılar matrisinde birim matris olmaması durumunda, birim matris oluşturacak biçimde uygun kısıtlara eksi değerler almayan yapay değişkenler eklenir. Ancak, simpleks algoritması ile d.p.p.' nin çözümünü bulabilmek için, yapay değişkenlerden bir an önce kurtulmak üzere gerekli önlem alınmalıdır. Bu amaçla yapay değişkenlere, $M>0$ ve çok büyük bir sayı olmak üzere, amaç fonksiyonunu ters yönde etkileyen birim katkılar verilir. Bu eklentilerle başlangıç simpleks tablo düzenlenerek, algoritmanın işlemlerine doğrudan başlanır. Buna göre,

$$\begin{aligned} &\min\ Z = \mathbf{cX} + M\mathbf{q} \\ &A\mathbf{X} + \mathbf{q} = \mathbf{b} \\ &\mathbf{X},\ \mathbf{q} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.18}$$

ve

$$\begin{aligned} &\max\ Z = \mathbf{cX} - M\mathbf{q} \\ &A\mathbf{X} + \mathbf{q} = \mathbf{b} \\ &\mathbf{X},\ \mathbf{q} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.19}$$

olur.

Örnek 6: (Problemin en iyi çözümünün olduğu durum**)**

$$\begin{aligned} P:\ \ &\min\ Z = X_1 + 2X_2 \\ &X_1 + X_2 \geq 2 \\ &-X_1 + X_2 \geq 1 \\ &X_1,\ X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı d.p.p.‘ nin simpleks tablo ile en iyi çözümünü bulunuz.

Çözüm:

Verilen primal d.p.p. standart hale getirilir.

$$\begin{aligned} P:\ \ &\min\ Z = X_1 + 2X_2 + 0X_3 + 0X_4 \\ &X_1 + X_2 - X_3 = 2 \\ &-X_1 + X_2 - X_4 = 1 \\ &X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4 \geq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A katsayılar matrisinde birim matris olmadığından, standart haldeki primal probleme Charnes’ in M Yöntemi uygulanarak, yapay değişkenler eklenir.

$$\begin{aligned} P:\ \ &\min\ Z = X_1 + 2X_2 + 0X_3 + 0X_4 + Mq_1 + Mq_2 \\ &X_1 + X_2 - X_3 + q_1 = 2 \\ &-X_1 + X_2 - X_4 + q_2 = 1 \\ &X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4, q_1, q_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$A = \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

A katsayılar matrisinde birim matris oluşturulur. Buna göre, simpleks tablo ile çözümleme yapılır.

Tablo-I			1	2	0	0	M	M	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	
M	q_1	2	1	1	-1	0	1	0	
M	q_2	1	-1	1	0	-1	0	1	
		$Z=3M$	-1	2M-2	-M	-M	0	0	≤ 0 olmalı

NOT: q_2 yapay değişkeni tablodan çıktığından bir sonraki tabloda yer almasına gerek yoktur.

Tablo-II			1	2	0	0	M	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{q}_1$	
M	q_1	1	2	0	-1	1	1	
2	X_2	1	-1	1	0	-1	0	
		$Z=M+2$	2M-3	0	-M	M-2	0	≤ 0 olmalı

Tablo-III			1	2	0	0	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	
1	X_1	1/2	1	0	-1/2	1/2	
2	X_2	3/2	0	1	-1/2	-1/2	
		$Z=7/2$	0	0	-3/2	-1/2	≤ 0 sağlandı

Tablo-III' te görüldüğü gibi en iyilik ölçütü sağlandı. Optimal çözüm

$\mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$ ve $Z^* = 7/2$

olarak bulunur.

Örnek 17: (Problemin uygun çözümünün olmadığı durum**)**

$$
\begin{aligned}
P:\ \min\ Z &= 2X_1 + 3X_2 \\
2X_1 - 2X_2 &\geq 2 \\
-4X_1 + 4X_2 &\geq 8 \\
X_2 &\leq 3 \\
X_1, X_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlı d.p.p.' nin simpleks tablo ile en iyi çözümünü bulunuz.

Çözüm:

Verilen primal d.p.p. standart hale getirilir.

$$
\begin{aligned}
P:\ \min\ & Z = 2X_1 + 3X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 \\
& 2X_1 - 2X_2 - X_3 = 2 \\
& -4X_1 + 4X_2 - X_4 = 8 \\
& X_2 + X_5 = 3 \\
& X_i \geq 0\ ,\ i = 1,2,\ldots,5
\end{aligned}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ ,\quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}
$$

A katsayılar matrisinde birim matris olmadığından, standart haldeki primal probleme Charnes' in M Yöntemi uygulanarak, yapay değişkenler eklenir.

$$
\begin{aligned}
P:\ \min\ & Z = 2X_1 + 3X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 + Mq_1 + Mq_2 \\
& 2X_1 - 2X_2 - X_3 + q_1 = 2 \\
& -4X_1 + 4X_2 - X_4 + q_2 = 8 \\
& X_2 + X_5 = 3 \\
& X_i \geq 0\ ,\ i = 1,2,\ldots,5 \\
& q_1, q_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
A = \left[\begin{array}{ccccc|cc} 2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

A katsayılar matrisinde birim matris oluşturulur. Buna göre, simpleks tablo ile çözümleme yapılır.

Tablo-I			2	3	0	0	0	M	M	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{y}_5$	$\mathbf{q}_1$	$\mathbf{q}_2$	
M	q_1	2	2	-2	-1	0	0	1	0	
M	q_2	8	-4	4	0	-1	0	0	1	
0	X_5	3	0	1	0	0	1	0	0	
		$Z = 10M$	-2M-2	2M-3	-M	-M	0	0	0	≤ 0 olmalı

Tablo-II			2	3	0	0	0	M	
C_B	T_V	$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{y}_1$	$\mathbf{y}_2$	$\mathbf{y}_3$	$\mathbf{y}_4$	$\mathbf{y}_5$	$\mathbf{q}_1$	
M	q_1	6	0	0	-1	-1/2	0	1	
3	X_2	2	-1	1	0	-1/4	0	0	
0	X_5	1	1	0	0	1/4	1	0	
		$Z = 6M + 6$	-5	0	-M	$\dfrac{-3-2M}{4}$	0	0	≤ 0 sağlandı

Tablo-II' den en iyilik ölçütü sağlandığı görülmektedir. Fakat, temelde pozitif düzeyli yapay değişken bulunmaktadır ($q_1 = 6$). Bu durumda, verilen d.p.p.' nin uygun çözümü yoktur. Dolayısıyla en iyi çözüm elde edilemez. Hatalı formülasyon durumu söz konusudur.