KONU 12: EŞİTSİZLİK KISITLI ÇOK DEĞİŞKENLİ OPTİMİZASYON PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Kuhn-Tucker Koşulları

$$\begin{aligned} &\min/\max\ Z = f(\mathbf{X}) \\ &\quad g_i(\mathbf{X})\{\le,\ge\}0 \qquad , \quad i=1,2,\ldots,m \end{aligned} \tag{12.1}$$

biçiminde tanımlı eşitsizlik kısıtlı çok değişkenli optimizasyon probleminin çözümü için Kuhn-Tucker koşullarından yararlanılır. Burada, $\mathbf{X}=[X_1\ X_2\ \ldots\ X_n]'$ olup, $f(\mathbf{X})$ amaç fonksiyonu ile $g_i(\mathbf{X})$, $i=1,2,\ldots,m$ kısıt fonksiyonları ikinci dereceden sürekli türevlenebilen fonksiyonlar olarak varsayılır. Eğer, $f(\mathbf{X})$ ve $g_i(\mathbf{X})$, $i=1,2,\ldots,m$ fonksiyonları dışbükey ise, Kuhn-Tucker koşulları gerekli ve yeterlidir. Dört farklı model yapısı için tanımlanabilecek olan Kuhn-Tucker koşulları aşağıdaki gibi verilebilir.

Model – I:

$$\begin{aligned} &\min\ Z = f(\mathbf{X}) \\ &g_i(\mathbf{X}) \le 0 \qquad , \quad i=1,2,\ldots,m \end{aligned}$$

i. $\dfrac{\partial f(\mathbf{X}^*)}{\partial X_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \dfrac{\partial g_i(\mathbf{X}^*)}{\partial X_j} = 0$, $j=1,2,\ldots,n$

ii. $g_i(\mathbf{X}^*) \le 0$, $i=1,2,\ldots,m$ (Kısıt koşulu)

iii. $\lambda_i^* g_i(\mathbf{X}^*) = 0$, $i=1,2,\ldots,m$ (Tümler gevşeklik koşulu)

iv. $\lambda_i^* \ge 0$, $i=1,2,\ldots,m$

Model – II:

$$\begin{aligned} &\min\ Z = f(\mathbf{X}) \\ &g_i(\mathbf{X}) \ge 0 \qquad , \quad i=1,2,\ldots,m \end{aligned}$$

i. $\dfrac{\partial f(\mathbf{X}^*)}{\partial X_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \dfrac{\partial g_i(\mathbf{X}^*)}{\partial X_j} = 0$, $j=1,2,\ldots,n$

ii. $g_i(\mathbf{X}^*) \ge 0$, $i=1,2,\ldots,m$

iii. $\lambda_i^* g_i\left(\mathbf{X}^*\right)=0 \quad , \quad i=1,2,\ldots,m$

iv. $\lambda_i^* \leq 0 \quad , \quad i=1,2,\ldots,m$

Model – III:

$$\begin{aligned} &\max \ Z=f\left(\mathbf{X}\right) \\ &g_i\left(\mathbf{X}\right)\leq 0 \qquad , \quad i=1,2,\ldots,m \end{aligned}$$

i. $\dfrac{\partial f\left(\mathbf{X}^*\right)}{\partial X_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^* \dfrac{\partial g_i\left(\mathbf{X}^*\right)}{\partial X_j}=0 \ , \ j=1,2,\ldots,n$

ii. $g_i\left(\mathbf{X}^*\right)\leq 0 \quad , \quad i=1,2,\ldots,m$

iii. $\lambda_i^* g_i\left(\mathbf{X}^*\right)=0 \quad , \quad i=1,2,\ldots,m$

iv. $\lambda_i^* \leq 0 \quad , \quad i=1,2,\ldots,m$

Model – IV:

$$\begin{aligned} &\max \ Z=f\left(\mathbf{X}\right) \\ &g_i\left(\mathbf{X}\right)\geq 0 \qquad , \quad i=1,2,\ldots,m \end{aligned}$$

v. $\dfrac{\partial f\left(\mathbf{X}^*\right)}{\partial X_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^* \dfrac{\partial g_i\left(\mathbf{X}^*\right)}{\partial X_j}=0 \ , \ j=1,2,\ldots,n$

vi. $g_i\left(\mathbf{X}^*\right)\geq 0 \quad , \quad i=1,2,\ldots,m$

vii. $\lambda_i^* g_i\left(\mathbf{X}^*\right)=0 \quad , \quad i=1,2,\ldots,m$

viii. $\lambda_i^* \geq 0 \quad , \quad i=1,2,\ldots,m$

Örnek 12.1:

$$\min\ f(\mathbf{X}) = (X_1 - 3)^2 + (X_2 - 5)^2$$
$$X_1 + X_2 \le 7$$

biçiminde tanımlı eşitsizlik kısıtlı optimizasyon probleminin en iyi çözüm değerini elde ediniz.

Çözüm:

i. $\dfrac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial X_1} = 2(X_1 - 3) + \lambda = 0$

$\dfrac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial X_2} = 2(X_2 - 5) + \lambda = 0$

ii. $X_1 + X_2 - 7 \le 0$

iii. $\lambda(X_1 + X_2 - 7) = 0$

iv. $\lambda \ge 0$

Kuhn-Tucker koşullarını sağlayan çözüm elde edilir.

- $\lambda = 0$ olsun.

  $$2(X_1 - 3) = 0 \Rightarrow X_1 = 3$$
  $$2(X_2 - 5) = 0 \Rightarrow X_2 = 5$$

  olup, elde edilen çözüm değerleri kısıt koşulunu sağlamaz.

- $\lambda \ne 0$ olsun.

  $$X_1 + X_2 - 7 = 0 \Rightarrow X_1 + X_2 = 7 \Rightarrow \left(-\frac{\lambda + 6}{2} + \frac{-\lambda + 10}{2} \right) = 7 \Rightarrow \lambda = 1 > 0$$

  $$2(X_1 - 3) + 1 = 0 \Rightarrow X_1 = \frac{5}{2}$$
  $$2(X_2 - 5) + 1 = 0 \Rightarrow X_2 = \frac{9}{2}$$

  $$\mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} X_1^* \\ X_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 9/2 \end{bmatrix} \quad , \quad \lambda^* = 1 \quad , \quad f(\mathbf{X}^*) = 0.5$$