GENEL MATEMATİK

LİMİT VE SÜREKLİLİK

Ankara Üniversitesi

Tanım 2.1.1.

ϵ pozitif bir reel sayı olsun.

$$\{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \epsilon\}$$

kümesine a noktasının ϵ komşuluğu denir. Buna göre a noktasının ϵ komşuluğu

$$\{x \in \mathbb{R} : a - \epsilon < x < a + \epsilon\}$$

kümesi yani

$$(a - \epsilon, a + \epsilon)$$

açık aralığıdır. a noktasının ϵ komşuluğundan a sayısının atılmasıyla elde edilen

$$\{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \epsilon\}$$

kümesine de a noktasının delinmiş ϵ komşuluğu denir.

Örnek 2.1.2.

1 noktasının $\frac{1}{2}$ komşuluğunu bulunuz.

Tanım 2.1.3.

$A \subset \mathbb{R}$ alt kümesi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $\epsilon > 0$ sayısı için

$$|x - a| < \epsilon$$

olacak şekilde A kümesinin a elemanından farklı bir x elemanı bulunabiliyorsa a noktasına A kümesinin bir yığılma noktası denir. Tanımdan anlaşılacağı gibi yığılma noktasının A kümesine ait olma zorunluluğu yoktur. A kümesinin yığılma noktalarının kümesi A' ile gösterilir.

Örnek 2.1.4.

$A = (0, 1)$ kümesinin yığılma noktaları kümesini bulunuz.

Tanım 2.1.5.

$A \subset \mathbb{R}$ küme, $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyon ve a noktasıda A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Her $\epsilon > 0$ sayısı için eğer

$$0 < |x - a| < \delta$$

olduğunda

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x değişkeni a sayısına yaklaştığında f fonksiyonunun limiti L sayısıdır denir ve

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

biçiminde gösterilir.

Örnek 2.1.6.

$$\lim_{x\to 2}(3x+1)=7$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 2.1.7.

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2+3\right)=3$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek 2.1.8.

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

ise

$$\lim_{x\to a}|f(x)|=|L|$$

dir. Gösteriniz. Bu önermenin karşıtı doğru mudur? Açıklayınız.

Not 2.1.9.

Limitin tanımı dikkate alındığında $c \in \mathbb{R}$ sabit sayı olmak üzere

$$\lim_{x \to a} c = c$$

ve

$$\lim_{x \to a} x = a$$

oldukları kolayca elde edilebilir.

Teorem 2.1.10.

$A \subset \mathbb{R}$ küme, $f : A \to \mathbb{R}$ ve $g : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar ve a noktasıda A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Eğer

$$\lim_{x \to a} f(x) \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to a} g(x)$$

limitleri varsa
(i) Her $c \in \mathbb{R}$ sabit sayısı için

$$\lim_{x \to a} (cf(x)) = c \lim_{x \to a} f(x)$$

dir.
(ii)

$$\lim_{x \to a} (f \mp g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) \mp \lim_{x \to a} g(x)$$

dir.

(iii)

$$\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$$

dir.

(iv) Her $x\in A$ için $g(x)\neq 0$ ve

$$\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$$

ise

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$$

dir.

Not 2.1.11.

$\lim\limits_{x \to a} x = a$ olduğundan $n \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n$$

olup yukardaki teoremin (i) ve (ii) özelliklerinden

$$\lim_{x \to a} \left(c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0 \right) = c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \ldots + c_1 a + c_0$$

ve dolayısıyla

$$\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$$

olur.

Örnek 2.1.12.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^2 - 1}$$

ifadesini hesaplayınız.

Tanım 2.1.13.

f fonksiyonu bir (c, a) açık aralığında tanımlı olsun. Her $\epsilon > 0$ sayısı için eğer

$$a - \delta < x < a$$

olduğunda

$$|f(x) - L_1| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x değişkeni a sayısına soldan yaklaştığında f fonksiyonunun sol taraflı limiti L_1 sayısıdır denir ve

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$$

biçiminde gösterilir.

Tanım 2.1.14.

f fonksiyonu bir (a, d) açık aralığında tanımlı olsun. Her $\epsilon > 0$ sayısı için eğer

$$a < x < a + \delta$$

olduğunda

$$|f(x) - L_2| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x değişkeni a sayısına sağdan yaklaştığında f fonksiyonunun sağ taraflı limiti L_2 sayısıdır denir ve

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$$

biçiminde gösterilir.

Teorem 2.1.15.

f fonksiyonu $a \in \mathbb{R}$ noktasının delinmiş bir komşuluğunda tanımlı olsun. f fonksiyonu $x \to a$ için L limitine sahiptir ancak ve ancak $x \to a$ için f fonksiyonunun sağ ve sol taraflı limitleri var ve L sayısına eşittir, yani

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

dir.

Örnek 2.1.16.

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

biçiminde tanımlı $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki sağ ve sol taraflı limitlerini bulunuz.

Örnek 2.1.17.

$$f(x) = x - [\![x]\!]$$

fonksiyonunun $x = 2$ ve $x = \frac{3}{2}$ noktalarındaki limitlerini bulunuz.