

GENEL MATEMATİK

FONKSİYONLAR

Ankara Üniversitesi

1. Fonksiyonlar

1.3. Trigonometrik Fonksiyonlar

Tanım 1.3.2.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$f(x + T) = f(x)$$

olacak şekilde bir pozitif T reel sayısı varsa f fonksiyonuna periyodik fonksiyon, T sayısına da f fonksiyonunun bir periyodu denir. T sayılarının bir en küçüğü varsa bu en küçük periyoda f fonksiyonunun esas periyodu denir.

1. Fonksiyonlar

1.3. Trigonometrik Fonksiyonlar

Örnek 1.3.3.

$f(x) = x - \llbracket x \rrbracket$ fonksiyonu periyodik midir? Periyodik ise esas periyodunu bulunuz.

Örnek 1.3.4.

$f(x) = \sin x$ fonksiyonu periyodik midir? Periyodik ise esas periyodunu bulunuz.

1. Fonksiyonlar

1.3. Trigonometrik Fonksiyonlar

Tanjant fonksiyonu

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

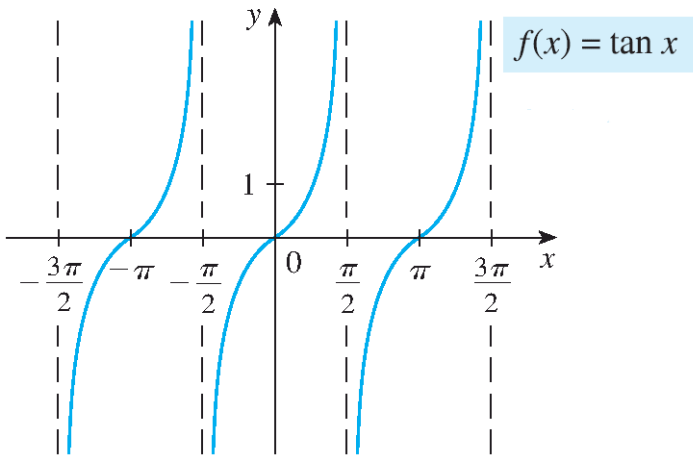
şeklinde tanımlanmış olup bu fonksiyonun tanım kümesi

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

kümesidir. Bu fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibidir:

1. Fonksiyonlar

1.3. Trigonometrik Fonksiyonlar



1. Fonksiyonlar

1.3. Trigonometrik Fonksiyonlar

Yukardaki grafikten anlaşılacağı gibi tanjant fonksiyonu tek fonksiyon olup $k \in \mathbb{Z}$ için

$$\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

aralığı üzerinde kesin artan fonksiyondur. Ayrıca bu fonksiyon periyodik fonksiyon olup esas periyodu π dir.

1. Fonksiyonlar

1.3. Trigonometrik Fonksiyonlar

Kotanjant fonksiyonu

$$f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

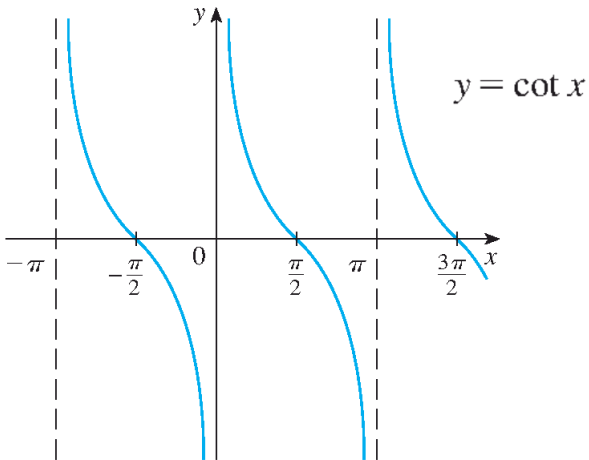
biçiminde tanımlanmış bu fonksiyonun tanım kümesi

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

şekindedir. Bu fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibidir:

1. Fonksiyonlar

1.3. Trigonometrik Fonksiyonlar



1. Fonksiyonlar

1.3. Trigonometrik Fonksiyonlar

Yukardaki grafikten anlaşılacağı gibi kotanjant fonksiyonu tek fonksiyon olup $k \in \mathbb{Z}$ için

$$(k\pi, \pi + k\pi)$$

aralığı üzerinde kesin azalan fonksiyondur. Ayrıca bu fonksiyon periyodik fonksiyon olup esas periyodu π dir.

1. Fonksiyonlar

1.4. Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

$f(x) = \sin x$ fonksiyonu

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

aralığında kesin olarak artan bir fonksiyon olduğundan bu aralıkta fonksiyon birebirdir. Sinüs fonksiyonu

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

olarak tanımlanırsa sinüs fonksiyonu birebir örten fonksiyon olur.

1. Fonksiyonlar

1.4. Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

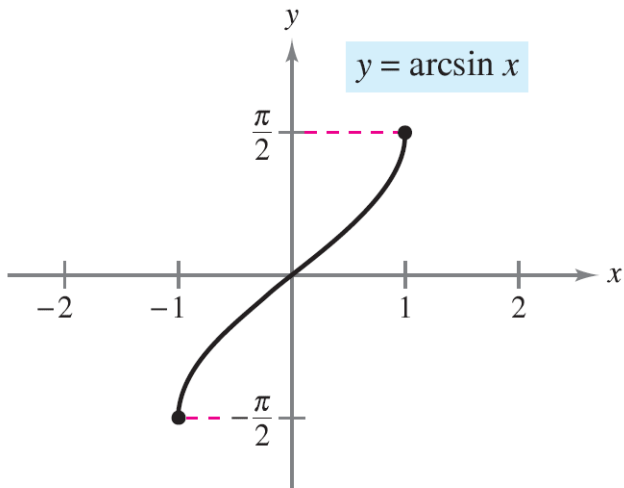
Dolayısıyla sinüs fonksiyonunun

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

ile verilen tersi mevcuttur. Ters fonksiyonun grafiği esas fonksiyonun grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriği olacağından $f^{-1}(x) = \arcsin x$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir:

1. Fonksiyonlar

1.4. Ters Trigonometrik Fonksiyonlar



1. Fonksiyonlar

1.4. Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

Grafikten de anlaşılacağı üzere $\arcsin x$ fonksiyonu tek fonksiyon olup tanım aralığı üzerinde, yani $[-1, 1]$ aralığında, kesin artan fonksiyondur.

1. Fonksiyonlar

1.4. Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

Benzer şekilde $f(x) = \cos x$ fonksiyonu

$$[0, \pi]$$

aralığında kesin olarak azalan bir fonksiyon olduğundan bu aralıkta fonksiyon birebirdir. Kosinüs fonksiyonu

$$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

olarak tanımlanırsa kosinüs fonksiyonu birebir örten fonksiyon olur.

1. Fonksiyonlar

1.4. Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

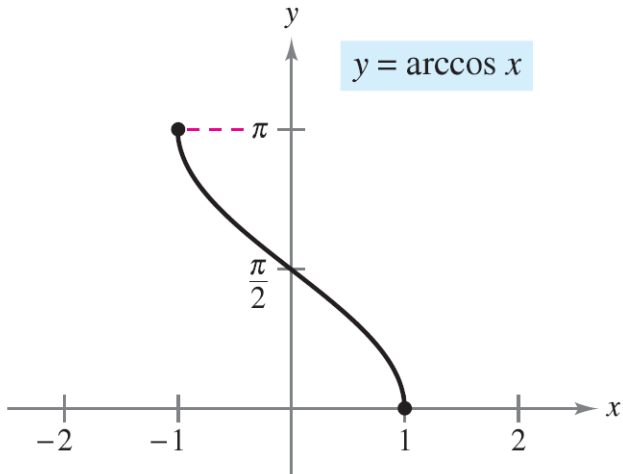
Dolayısıyla kosinüs fonksiyonunun

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

ile verilen tersi mevcuttur. Ters fonksiyonun grafiği esas fonksiyonun grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriği olacağından $f^{-1}(x) = \arccos x$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir:

1. Fonksiyonlar

1.4. Ters Trigonometrik Fonksiyonlar



1. Fonksiyonlar

1.4. Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

Grafikten de anlaşılacağı üzere $\arccos x$ fonksiyonu tanım aralığı üzerinde, yani $[-1, 1]$ aralığında, kesin azalan fonksiyondur.

Örnek 1.4.1.

$$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ve} \quad \arccos 1$$

ifadelerini hesaplayınız.