

KONU 1. PERİYODİK DİFERENSİYEL OPERATÖRLER

$$L_1(0, \pi) = \left\{ f : \int_0^\pi |f(x)| dx < \infty \right\},$$
$$L_2(0, \pi) = \left\{ g : \int_0^\pi |g(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

Lebesgue uzaylarını göz önünde bulunduralım. $L_1(0, \pi)$ uzayı normlu Banach uzayıdır ve $f \in L_1(0, \pi)$ için f fonksiyonunun $L_1(0, \pi)$ normu

$$\|f\|_1 := \int_0^\pi |f(x)| dx$$

olarak tanımlanır. $L_2(0, \pi)$ bir Hilbert uzayıdır ve $f, g \in L_2(0, \pi)$ için

$$(f, g) := \int_0^\pi f(x) \overline{g(x)} dx$$

olarak tanımlanır.

q ile $[0, \pi]$ aralığında tanımlı, reel değerli ve sürekli bir fonksiyonu gösterelim.

$$l(y) = -y'' + q(x)y, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

diferensiyel ifadesinin yardımı ile $L_2(0, \pi)$ uzayında periyodik Sturm-Liouville P operatörünü tanımlayalım.

$$D(P) = \left\{ \begin{array}{l} y, \quad y \in L_2(0, \pi) \\ \begin{array}{l} 1. y'' \text{ mevcut} \\ 2. l(y) \in L_2(0, \pi) \\ 3. y(0) = y(\pi) \\ y'(0) = y'(\pi) \end{array} \end{array} \right\}$$

Tanım 1.1. $\forall y \in D(P)$ için

$$P(y) = l(y)$$

olarak tanımlanan operatöre periyodik Sturm-Liouville operatörü denir.

$$D(A) = \left\{ \begin{array}{l} y, \quad y \in L_2(0, \pi) \\ \begin{array}{l} 1. y'' \text{ mevcut} \\ 2. l(y) \in L_2(0, \pi) \\ 3. y(0) = -y(\pi) \\ y'(0) = -y'(\pi) \end{array} \end{array} \right\}$$

olmak üzere, $\forall y \in D(A)$ için

$$A(y) = l(y)$$

operatörüne yariperiyodik (antiperiyodik) Sturm-Liouville operatörü adı verilir.

Alıstırmalar

1. $L_2(0, \pi)$ uzayında

$$l_0(y) = -y'', \quad 0 \leq x \leq \pi$$

diferensiyel ifadesinin ve

$$\begin{aligned} y(0) &= y(\pi) \\ y'(0) &= y'(\pi) \end{aligned}$$

sınır koşullarının yardımı ile tanımlanan operatör P_0 olsun.

a) $D(P_0)$ tanım kümesini yazınız.

b) $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = \cos x$ fonksiyonu P_0 operatörünün tanım kümesinden midir? Neden?

c) $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g(x) = \sin(3x)$ fonksiyonu P_0 operatörünün tanım kümesinden midir? Neden?

2. $L_2(0, \pi)$ uzayında

$$l_0(y) = -y'', \quad 0 \leq x \leq \pi$$

diferensiyel ifadesinin ve

$$\begin{aligned} y(0) &= -y(\pi) \\ y'(0) &= -y'(\pi) \end{aligned}$$

sınır koşullarının yardımı ile tanımlanan operatör A_0 olsun.

a) $D(A_0)$ tanım kümesini bulunuz.

b) $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = 2 \sin x$ olmak üzere, $f \in D(A_0)$ mıdır? Neden?

c) $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g(x) = \cos\left(\frac{3x}{2}\right)$ olmak üzere, $g, D(A_0)$ tanım kümesinden midir? Neden?