

## KONU 2. PERİYODİK OPERATÖRLER İÇİN LAGRANGE EŞİTLİĞİ

**Teorem 2.1.** Her  $f, g \in D(P)$  için

$$(Pf, g) = (f, Pg) \quad (2.1)$$

eşitliği gerçekleşir.

**İspat.**

$$\begin{aligned} (Pf, g) &= (l(f), g) = \int_0^\pi l(f) \overline{g(x)} dx = \int_0^\pi [-f'' + q(x)f] \overline{g(x)} dx \\ &= - \int_0^\pi f''(x) \overline{g(x)} dx + \int_0^\pi q(x) f(x) \overline{g(x)} dx \end{aligned}$$

Kısmi integrasyon ve  $f, g$  fonksiyonlarının gerçeklediği sınır koşulları kullanılarak

$$(Pf, g) = \int_0^\pi f(x) \left[ \overline{-g'' + q(x)g} \right] dx = (f, Pg)$$

elde edilir.

**Teorem 2.2.** Her  $y_1, y_2 \in D(A)$  için

$$(Ay_1, y_2) = (y_1, Ay_2) \quad (2.2)$$

eşitliği sağlanır.

**İspat.**  $A$  operatörünün tanımı kullanılarak (2.1) eşitliğine benzer biçimde (2.2) eşitliği elde edilir.

### Alıştırmalar

1. Teorem 2.2 'yi ispatlayınız.

2.  $L_2(0, \frac{\pi}{2})$  uzayında

$$l(y) = -y'' + (\cos x)y, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

diferensiyel ifadesinin ve

$$\begin{aligned} y(0) &= -y\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ y'(0) &= -y'\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

sınır koşullarının yardımı ile tanımlanan operatör  $T$  olsun.

- a)**  $D(T)$  tanım kümesini yazınız.
- b)**  $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow R$  ve  $f(x) = \sin(2x)$  fonksiyonu  $D(T)$  tanım kümesinden midir? Neden?
- c)** Her  $y_1, y_2 \in D(T)$  için

$$(Ty_1, y_2) = (y_1, Ty_2)$$

olduğunu ispatlayınız.