KONU 3. PERİYODİK OPERATÖRLERİN ÖZDEĞERLERİ VE ÖZFONKSİYONLARI

Tanım 3.1. $P : L_2(0,\pi) \to L_2(0,\pi)$ operatörünün tanım kümesi $D(P)$ olmak üzere

$$Py = \lambda y,\ y \in D(P) \tag{3.1}$$

denkleminin $\lambda = \lambda_0$ kompleks sayısı için $y_0 \neq 0$ çözümü mevcut ise, λ_0 sayısına P operatörünün özdeğeri, y_0 fonksiyonuna ise λ_0 sayısına karşılık gelen özfonksiyonu denir.

P operatörünün tanımı kullanılarak (3.1) denklemini aşağıdaki gibi de yazabiliriz:

$$-y^{''} + q(x)y = \lambda y \quad 0 \leq x \leq \pi \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} y(0) = y(\pi) \\ y^{'}(0) = y^{'}(\pi) \end{cases} \tag{3.3}$$

Tanım 3.2. Eğer $\lambda = \lambda_0$ kompleks sayısı için $(3.2)-(3.3)$ sınır değer probleminin $y(x,\lambda_0) \neq 0$ çözümü mevcut ise λ_0 sayısına P operatörünün özdeğeri, $y(x,\lambda_0)$ fonksiyonuna ise λ_0 sayısına karşılık gelen özfonksiyonu adı verilir.

Teorem 3.3. P operatörünün tüm özdeğerleri reeldir.

İspat. λ_0 sayısı P operatörünün bir özdeğeri, y_0 ise bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyonu olsun. Yani

$$Py_0 = \lambda_0 y_0$$

gerçeklensin. Lagrange eşitliğini kullanarak

$$(Py_0, y_0) = (y_0, Py_0)$$

elde edilir. Sonuncu eşitlikten ise

$$\lambda_0(y_0, y_0) - \overline{\lambda_0}(y_0, y_0) = 0$$

çıkar. Buradan

$$(\lambda_0 - \overline{\lambda_0})\,||y_0||^2 = 0$$

olur. Bu ise $\lambda_0 = \overline{\lambda_0}$ anlamına gelir, yani λ_0 reeldir.

Teorem 3.4. P operatörünün farklı özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonları diktir.

İspat. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sayıları P operatörünün iki özdeğeri ve y_1, y_2 ise sırasıyla bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ise

$$\begin{aligned} Py_1 &= \lambda_1 y_1 \\ Py_2 &= \lambda_2 y_2 \end{aligned}$$

sağlanır. Lagrange eşitliğinde $f = y_1$ ve $g = y_2$ olmak üzere

$$(Py_1, y_2) = (y_1, Py_2)$$

elde edilir. Buradan

$$\lambda_1(y_1, y_2) = \lambda_2(y_1, y_2) \text{ veya } (\lambda_1 - \lambda_2)(y_1, y_2) = 0$$

çıkar. Bu ise

$$(y_1, y_2) = 0$$

anlamına gelir, yani $y_1 \perp y_2$ olur.

Alıştırmalar

1. A operatörünün tüm özdeğerlerinin reel olduğunu gösteriniz.
2. A operatörünün farklı özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlarının dik olduğunu ispatlayınız.