## KONU 4. POZİTİF VE PERİYODİK STURM-LİOUVİLLE OPERATÖRLERİ

**Tanım 4.1.** $H$ bir Hilbert uzayı, $T$ ise tanım kümesi $D(T) \subset H$ olan ve $H$ uzayında tanımlı bir operatör olmak üzere, her $f \in D(T)$ için

$$(Tf, f) \geq 0$$

ise, $T$ operatörüne pozitif operatör denir.

**Örnek 4.2.** $L_2(0,\pi)$ uzayında

$$l_0(y) = -y^{''}, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

diferensiyel ifadesinin ve

$$\begin{aligned} y(0) &= y(\pi) \\ y^{'}(0) &= y^{'}(\pi) \end{aligned}$$

sınır koşullarının yardımı ile tanımlanan operatör $P_0$ olmak üzere $P_0 \geq 0$ olduğunu ispatlayınız.

**Çözüm.**

$$D(P_0) = \left\{ y, \quad y \in L_2(0,\pi) \quad \begin{array}{c} 1.\ y^{''} \text{ mevcut} \\ 2.\ y^{''} \in L_2(0,\pi) \\ 3.\ y(0) = y(\pi) \\ y^{'}(0) = y^{'}(\pi) \end{array} \right\}$$

Her $f \in D(P_0)$ için

$$\begin{aligned} (P_0 f, f) &= \int_0^\pi \left[-f^{''}(x)\right] \overline{f(x)} dx = -\int_0^\pi \overline{f(x)} df^{'}(x) \\ &= -f^{'}(x)\,\overline{f(x)}\Big|_0^\pi + \int_0^\pi f^{'}(x)\, d\overline{f(x)} \\ &= -f^{'}(\pi)\,\overline{f(\pi)} + f^{'}(0)\,\overline{f(0)} + \int_0^\pi f^{'}(x)\,\overline{f^{'}(x)} dx \\ &= -f^{'}(0)\,\overline{f(0)} + f^{'}(0)\,\overline{f(0)} + \int_0^\pi \left|f^{'}(x)\right|^2 dx \\ &= \int_0^\pi \left|f^{'}(x)\right|^2 dx \geq 0 \end{aligned}$$

**Teorem 4.3.** Eğer $q \geq 0$ ise, bu durumda $P$ periyodik Sturm-Liouville operatörü pozitiftir.

**İspat.** Her $f \in D(P)$ için

$$\begin{aligned}
(Pf, f) &= \int_0^{\pi} \left[-f^{''} + q(x) f\right] \overline{f(x)} dx \\
&= -\int_0^{\pi} f^{''}(x) \overline{f(x)} dx + \int_0^{\pi} q(x) |f(x)|^2 dx \\
&= \int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx + \int_0^{\pi} q(x) |f(x)|^2 dx \geq 0.
\end{aligned}$$

Yani $P$ operatörü pozitiftir.

**Alıştırmalar**

**1.** $L_2(0,1)$ uzayında

$$l_0(y) := -y^{''}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

diferansiyel ifadesinin ve

$$\begin{aligned}
y(0) &= -y(1) \\
y^{'}(0) &= -y^{'}(1)
\end{aligned}$$

sınır koşullarının yardımı ile tanımlanan operatör $K$ olmak üzere $K \geq 0$ olduğunu gösteriniz.

**2.** $q \geq 0$ olmak üzere, $L_2(0,\pi)$ uzayında tanımlı antiperiyodik Sturm-Liouville $A$ operatörünün pozitif olduğunu ispatlayınız.