## KONU 5. ÖRNEKLER

**Soru 5.1.** $L_2(0,\pi)$ uzayında

$$l_0(y) = -y^{''}, \quad 0 \le x \le \pi$$

diferansiyel ifadesinin ve

$$\begin{aligned} y(0) &= y(\pi) \\ y^{'}(0) &= y^{'}(\pi) \end{aligned}$$

sınır koşullarının yardımı ile tanımlanan $P_0$ operatörünün özdeğerlerini ve özfonksiyonlarını bulunuz.

**Çözüm.**

$$P_0(y) = \lambda y,$$

veya

$$-y^{''} = \lambda y \quad 0 \le x \le \pi \tag{5.1}$$

$$\begin{cases} y(0) = y(\pi) \\ y^{'}(0) = y^{'}(\pi) \end{cases} \tag{5.2}$$

olur. (5.1) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x), \ \ |c_1| + |c_2| \neq 0$$

biçimindedir. Sınır koşullarından

$$\begin{aligned} (1 - \cos(\sqrt{\lambda}\pi)c_1 - \sin(\sqrt{\lambda}\pi)c_2 &= 0 \\ \sin(\sqrt{\lambda}\pi)c_1 + (1 - \cos(\sqrt{\lambda}\pi))c_2 &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\det \begin{vmatrix} 1 - \cos(\sqrt{\lambda}\pi), & -\sin(\sqrt{\lambda}\pi) \\ \sin(\sqrt{\lambda}\pi), & 1 - \cos(\sqrt{\lambda}\pi) \end{vmatrix} = 0$$

çıkar. Sonuncu denklemden

$$1 - 2\cos(\sqrt{\lambda}\pi) + \cos^2(\sqrt{\lambda}\pi) + \sin^2(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$$

veya

$$\cos(\sqrt{\lambda}\pi) = 1$$

bulunur. Buradan ise

$$\lambda_n = 4n^2, \ n = 0, 1, 2, ...$$

elde edilir.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda_n$ | 0 | 4 | 16 | , ..., | $4n^2$ | özdeğerler |
| $y_n$ | 1 | $\cos(2x)$ <br> $\sin(2x)$ | $\cos(4x)$ <br> $\sin(4x)$ | , ..., | $\cos(2nx)$ <br> $\sin(2nx)$ | özfonksiyonlar |

**Alıştırmalar**

**1)** $L_2(0,1)$ uzayında

$$\begin{cases} -y^{''} = \lambda y, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = y(1) \\ y^{'}(0) = y^{'}(1) \end{cases}$$

sınır değer probleminin özdeğerlerini ve özfonksiyonlarını bulunuz

**2**. $L_2(0,\pi)$ uzayında

$$\begin{cases} -y^{''} = \lambda y, \quad 0 \leq x \leq \pi \\ y(0) = -y(\pi) \\ y^{'}(0) = -y^{'}(\pi) \end{cases}$$

sınır değer probleminin ürettiği operatör $A_0$ olmak üzere, $A_0$ operatörünün özdeğer ve özfonksiyonlarını elde ediniz.