KONU 6. STURM-LİOUVİLLE DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ

q fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$-y^{''}+q(x)y=\lambda y,\quad 0\le x\le\pi \tag{6.1}$$

denklemini göz önünde bulunduralım. (6.1) denkleminin

$$y(0)=0,\ y^{'}(0)=1 \tag{6.2}$$

başlangıç koşullarını gerçekleyen çözümünü $\varphi(x,\lambda)$ ile gösterelim.

Teorem 6.1. $\varphi(x,\lambda)$ çözümü

$$\varphi(x,\lambda)=\frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}}+\int_0^x\frac{\sin(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}}q(t)\varphi(t,\lambda)dt \tag{6.3}$$

integral denklemini gerçekler.

İspat. (6.3) eşitliğinden $\varphi(0,\lambda)=0$ elde edilir.

$$\varphi'(x,\lambda)=\cos(\sqrt{\lambda}x)+\int_0^x\cos(\sqrt{\lambda}(x-t))q(t)\varphi(t,\lambda)dt \tag{6.4}$$

olup bu denklemden

$$\varphi'(0,\lambda)=1$$

bulunur, yani (6.3) integral denkleminin her bir çözümü (6.2) koşullarını sağlar. (6.4) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\varphi''(x,\lambda) &= -\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x)-\sqrt{\lambda}\int_0^x\sin(\sqrt{\lambda}(x-t))q(t)\varphi(t,\lambda)dt+q(x)\varphi(x,\lambda)\\ &= -\lambda\left[\frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}}+\int_0^x\frac{\sin(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}}q(t)\varphi(t,\lambda)dt\right]+q(x)\varphi(x,\lambda)\\ &= -\lambda\varphi(x,\lambda)+q(x)\varphi(x,\lambda)\end{aligned}$$

olup

$$-\varphi''(x,\lambda)+q(x)\varphi(x,\lambda)=\lambda\varphi(x,\lambda),\quad 0\le x\le\pi$$

sağlanır, yani φ fonksiyonu (6.1) denklemini de gerçekler.

(6.1) denkleminin

$$y(0)=1,\ y^{'}(0)=0 \tag{6.5}$$

başlangıç koşullarını gerçekleyen çözümünü θ ile gösterelim.

Alıştırma.

1. $(6.1), (6.5)$ başlangıç değer probleminin çözümü olan $\theta(x,\lambda)$ fonksiyonunun

$$\theta(x,\lambda) = \cos(\sqrt{\lambda}x) + \int\limits_0^x \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}} q(t)\theta(t,\lambda)dt$$

integral denklemini gerçeklediğini ispatlayınız.