KONU 7. GENEL ÖZDEĞER DENKLEMLERİ

$$-y'' + q(x)\, y = \lambda y, \quad 0 \le x \le \pi \tag{7.1}$$

denkleminin iki y_1 ve y_2 çözümünün Wronskiyeni

$$W[y_1, y_2] = y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x)$$

olarak tanımlanır.

$$W[\varphi(x,\lambda), \theta(x,\lambda)] = -1$$

olduğu açıktır.

Teorem 7.1. P operatörünün özdeğerleri

$$\varphi'(\pi,\lambda) + \theta(\pi,\lambda) = 2$$

denkleminin kökleridir.

İspat. $\lambda = \lambda_0$ sayısı P operatörünün bir özdeğeri, $y_0(x) = y(x,\lambda_0)$ ise bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyonu olsun. $W[\varphi(x,\lambda_0), \theta(x,\lambda_0)] = -1$ olduğundan $\varphi(x,\lambda_0)$ ve $\theta(x,\lambda_0)$ fonksiyonları (7.1) denkleminin $\lambda = \lambda_0$ için temel çözümler sistemidir. Bu nedenle de

$$y(x,\lambda_0) = c_1\theta(x,\lambda_0) + c_2\varphi(x,\lambda_0), \ \ |c_1| + |c_2| \neq 0$$

olur. Sınır koşullarından

$$\begin{aligned} c_1[\theta(\pi,\lambda_0) - 1] + c_2\varphi(\pi,\lambda_0) &= 0 \\ c_1\theta'(\pi,\lambda_0) + c_2\left[\varphi'(\pi,\lambda_0) - 1\right] &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuncu sistemden ise

$$\det\begin{vmatrix} \theta(\pi,\lambda_0) - 1 & , & \varphi(\pi,\lambda_0) \\ \theta'(\pi,\lambda_0) & , & \varphi'(\pi,\lambda_0) - 1 \end{vmatrix} = 0$$

bulunur. Buradan

$$\theta(\pi,\lambda_0)\varphi'(\pi,\lambda_0) - \theta'(\pi,\lambda_0)\varphi(\pi,\lambda_0) - \varphi'(\pi,\lambda_0) - \theta(\pi,\lambda_0) + 1 = 0$$

olup

$$W[\theta(x,\lambda_0), \varphi(x,\lambda_0)] - \varphi'(\pi,\lambda_0) - \theta(\pi,\lambda_0) + 1 = 0$$

eşitliği elde edilir. O halde

$$1 - \varphi^{!}(\pi,\lambda_0) - \theta(\pi,\lambda_0) + 1 = 0$$

yani

$$\varphi'(\pi,\lambda_0) + \theta(\pi,\lambda_0) = 2$$

olur.

Alıştırma.

1. A operatörünün özdeğerlerinin

$$\varphi^{'}(\pi,\lambda_0)+\theta(\pi,\lambda_0)=-2$$

denkleminin kökleri olduğunu ispatlayınız.