

KONU 8. ÖZDEĞERLERİN KATI

Tanım 8.1. $\lambda = \lambda_0$ özdeğerine karşılık gelen lineer bağımsız özfonksiyonların sayısına λ_0 özdeğerinin katı denir

Tanımdan P operatörünün özdeğerinin katı bir veya iki olur.

Teorem 8.2. $\lambda = \lambda_0$ sayısının P operatörünün iki katlı özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul

$$\theta(\pi, \lambda_0) = \varphi'(\pi, \lambda_0) = 1, \theta'(\pi, \lambda_0) = \varphi(\pi, \lambda_0) = 0 \quad (8.1)$$

olmasıdır.

İspat. $\lambda = \lambda_0$ sayısı P operatörünün iki katlı özdeğeri, $y_1(x, \lambda_0)$ ve $y_2(x, \lambda_0)$ ise bu özdeğere karşılık gelen lineer bağımsız özfonksiyonlar olsun.

$$\begin{aligned} \varphi(x, \lambda_0) &= c_1 y_1(x, \lambda_0) + c_2 y_2(x, \lambda_0) \\ \theta(x, \lambda_0) &= c_3 y_1(x, \lambda_0) + c_4 y_2(x, \lambda_0) \end{aligned}$$

olur. Sınır koşullarından

$$\begin{aligned} \varphi'(\pi, \lambda_0) &= c_1 y_1'(\pi, \lambda_0) + c_2 y_2'(\pi, \lambda_0) \\ &= c_1 y_1'(0, \lambda_0) + c_2 y_2'(0, \lambda_0) \\ &= \varphi'(0, \lambda_0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta(\pi, \lambda_0) &= c_3 y_1(\pi, \lambda_0) + c_4 y_2(\pi, \lambda_0) \\ &= c_3 y_1(0, \lambda_0) + c_4 y_2(0, \lambda_0) \\ &= \theta(0, \lambda_0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$\theta(\pi, \lambda_0) = \varphi'(\pi, \lambda_0) = 1$$

olur.

$$\begin{aligned} \varphi(\pi, \lambda_0) &= c_1 y_1(\pi, \lambda_0) + c_2 y_2(\pi, \lambda_0) \\ &= c_1 y_1(0, \lambda_0) + c_2 y_2(0, \lambda_0) \\ &= \varphi(0, \lambda_0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta'(\pi, \lambda_0) &= c_3 y_1'(\pi, \lambda_0) + c_4 y_2'(\pi, \lambda_0) \\ &= c_3 y_1'(0, \lambda_0) + c_4 y_2'(0, \lambda_0) \\ &= \theta'(0, \lambda_0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Tersine (8.1) gerçeklensin. Bu durumda hem $\varphi(x, \lambda_0)$, hem de $\theta(x, \lambda_0)$ sınır koşullarını gerçeklediğinden ve lineer bağımsız olduğundan, $\varphi(x, \lambda_0)$ ve $\theta(x, \lambda_0)$ fonksiyonları λ_0 özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon olur, yani λ_0 ın katı iki olur.

Alıştırma.

1) $\lambda = \lambda_0$ sayısının A operatörünün iki katlı özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul

$$\theta(\pi, \lambda_0) = \varphi'(\pi, \lambda_0) = -1, \quad \theta'(\pi, \lambda_0) = \varphi(\pi, \lambda_0) = 0$$

olmasıdır. Bunu ispatlayınız.