KONU 9. SOYUT OPERATÖRLERİN SPEKTRUMU VE REZOLVENTİ

Tanım 9.1. $B : H \to H$ bir operatör, H ise bir Hilbert uzayı olmak üzere, $\lambda \in \mathbb{C}$ için $(B - \lambda I)^{-1}$ operatörüne B operatörünün rezolvent operatörü denir ve

$$R_\lambda(B) = (B - \lambda I)^{-1}$$

olarak gösterilir.

Tanım 9.2. B operatörünün rezolvent operatörünün mevcut ve sınırlı olduğu tüm kompleks λ sayılarının kümesine B operatörünün rezolvent kümesi denir ve $\rho(B)$ ile gösterilir, yani

$$\rho(B) = \left\{ \lambda : \begin{array}{ll} 1. & R_\lambda(B) \text{ mevcut} \\ 2. & R_\lambda(B) \text{ sınırlı} \\ 3. & \overline{D\left[R_\lambda(B)\right]} = H \end{array} \right.$$

olarak tanımlanır.

Tanım 9.3. $\sigma(B) = \mathbb{C} \backslash \rho(B)$ kümesine B operatörünün spektrumu denir.

Tanım 9.4. B operatörünün rezolvent operatörünün mevcut olmadığı tüm λ kompleks sayılarının kümesine B operatörünün özdeğerler kümesi adı verilir ve $\sigma_d(B)$ olarak gösterilir, yani

$$\sigma_d(B) = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C},\ R_\lambda(B) \text{ mevcut değil}\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 9.5.

$$\left\{ \lambda : \lambda \in \mathbb{C}, \begin{array}{ll} 1. & R_\lambda(B) \text{ mevcut} \\ 2. & R_\lambda(B) \text{ sınırsız} \\ 3. & \overline{D\left[R_\lambda(B)\right]} = H \end{array} \right.$$

kümesine B operatörünün sürekli spektrumu denir ve $\sigma_c(B)$ olarak gösterilir.

Tanımlardan

$$\sigma_d(B) \subset \sigma(B),\ \sigma_c(B) \subset \sigma(B)$$

olduğu açıktır. Ayrıca $\rho(B)$ kümesi açık bir kümedir.

Alıştırmalar.

1) $T : E_n \to E_n$ bir nxn matris olmak üzere
a) $\sigma_d(T) = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C},\ \det(A - \lambda I) = 0\}$
b) $\rho(T) = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C},\ \det(A - \lambda I) \neq 0\}$
olduğunu ispatlayınız.
2) $B : H \to H$ olmak üzere
a) $R_\mu(B) - R_\lambda(B) = (\mu - \lambda) R_\mu(B) R_\lambda(B),\ \forall \lambda, \mu \in \rho(B)$
b) $\dfrac{d}{d\lambda} R_\lambda(B) = R_\lambda^2(B),\ \forall \lambda \in \rho(B)$
c) $\dfrac{d^n}{d\lambda^n} R_\lambda(B) = (n-1)! R_\lambda^n(B)$
olduğunu gösteriniz.