

KONU 10. REZOLVENT OPERATÖRE AİT ÖRNEKLER

$B : H \rightarrow H$ operatörünün rezolvent operatörünü bulmak için

$$Bf - \lambda f = g, \quad \forall f \in D(B), \quad g \in H \quad (10.1)$$

homojen olmayan denklemini çözmek gerekiyor. Gerçekten (10.1) denkleminden

$$\begin{aligned} (B - \lambda I)f &= g, \quad f \in D(B), \quad g \in H \\ f &= (B - \lambda I)^{-1}g, \\ f &= R_\lambda(B)g \end{aligned}$$

elde edilir. Bunun tersi de doğrudur. Diferensiyel operatörlerin rezolvent operatörleri integral operatör olup, bu operatörün çekirdeğine Green fonksiyonu adı verilir.

Örnek 10.1. L ile $L_2(0, \pi)$ uzayında

$$l(y) = -y'' + q(x)y, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

diferensiyel ifadesinin ve

$$\begin{aligned} y'(0) - hy(0) &= 0 \\ y'(\pi) + Hy(\pi) &= 0 \end{aligned}$$

sınır koşullarının yardımı ile üretilen operatör gösterilsin. L operatörünün rezolventini bulunuz.

Çözüm. $u(x, \lambda)$ ve $v(x, \lambda)$ ile

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

denkleminin, sırasıyla

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = h$$

ve

$$y(\pi) = -1, \quad y'(\pi) = H$$

başlangıç koşullarını gerçekleyen çözümlerini gösterelim.

$$\begin{aligned} -y'' + q(x)y - \lambda y &= f, \quad 0 \leq x \leq \pi \\ y'(0) - hy(0) &= 0 \\ y'(\pi) + Hy(\pi) &= 0 \end{aligned}$$

homojen olmayan sınır değer probleminin çözümü L operatörünün rezolventi olur.

$$\omega(\lambda) = W[u, v]$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\rho(L) &= \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}, \omega(\lambda) \neq 0\} \\ \sigma(L) &= \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}, \omega(\lambda) = 0\}\end{aligned}$$

elde edilir.

$$y = R_\lambda(L)f(x) = \int_0^\pi G(x, t; \lambda)f(t)dt$$
$$G(x, t; \lambda) = \begin{cases} \frac{u(t, \lambda)v(x, \lambda)}{\omega(\lambda)} & , \quad 0 \leq t \leq x \\ \frac{u(x, \lambda)v(t, \lambda)}{\omega(\lambda)} & , \quad x \leq t \leq \pi \end{cases}$$

L operatörünün rezolventi olur.

Alıştırma.

1) $L_2(0, \pi)$ uzayında

$$l_0(y) = -y'', \quad 0 \leq x \leq \pi$$

diferensiyel ifadesinin ve

$$y(0) = y(\pi) = 0$$

sınır koşullarının yardımı ile üretilen L_0 operatörünün rezolventini bulunuz.