

KONU 11. ÇARPMA OPERATÖRLERİ

Tanım 11.1. $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere, $L_2(\mathbb{R}) = L_2(-\infty, \infty)$ uzayında tanım kümesi

$$D(T) = \{f : f \in L_2(\mathbb{R}), \varphi f \in L_2(\mathbb{R})\}$$

olan ve

$$Tf(x) = \varphi(x)f(x), \forall f \in L_2(\mathbb{R})$$

gibi tanımlanan

$$T : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$$

T operatörüne $L_2(\mathbb{R})$ uzayında φ fonksiyonuna çarpma operatörü denir. Eğer φ sınırlı fonksiyon ise $D(T) = L_2(\mathbb{R})$ olur. φ sınırsız fonksiyon ise $D(T) \subset L_2(\mathbb{R})$ gerçekleşir.

Soru 11.2. $A : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ ve

$$Af(x) = \frac{1}{1+x^2}f(x), f \in L_2(\mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan A operatörü verilsin.

a) $D(A)$ tanım kümesini bulunuz.

b) $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\psi(x) = \frac{1}{1+|x|}$ fonksiyonu $D(A)$ tanım kümesinden midir?

Neden?

c) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g(x) = x^2$ fonksiyonu $D(A)$ tanım kümesinden midir?

Neden?

Çözüm. a) Çarpma fonksiyonu sınırlı olduğundan

$$D(A) = L_2(\mathbb{R})$$

olur.

b) $\psi(x) = \frac{1}{1+|x|}$ fonksiyonu $L_2(\mathbb{R})$ dendir. $\psi(x)\frac{1}{1+x^2} \in L_2(\mathbb{R})$ olduğundan $\psi \in D(A)$ olur.

c) $g \notin L_2(\mathbb{R})$ olduğu açıktır.

Soru 11.3. $B : L_2[0, \infty) \rightarrow L_2[0, \infty)$ ve

$$Bf(x) = x^2f(x), f \in L_2(0, \infty)$$

gibi tanımlanan B operatörü için

a) $D(B)$ tanım kümesini yazınız.

b) $g(x) = \frac{1}{1+x}$ olmak üzere, g fonksiyonu $D(B)$ tanım kümesinden midir?

Neden?

c) $\psi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ve $\psi(x) = \frac{1}{1+x^4}$ fonksiyonu $D(B)$ tanım kümesinden midir?

Çözüm.

- a) $D(B) = \{f : f \in L_2(0, \infty), x^2 f \in L_2(0, \infty)\}$
- b) $g \notin D(B)$
- c) $\psi \in D(B)$

Alıştırma.

- 1) $T : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ ve

$$Tf(x) = \frac{e^x}{1 + |x|} f(x), \quad f \in L_2(\mathbb{R})$$

operatörü verilsin.

- a) $D(T) = ?$
- b) $g(x) = e^{-\frac{x}{2}}$ olmak üzere, g fonksiyonunun $D(T)$ tanım kümesinden olup olmadığını inceleyiniz.
- c) $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\psi(x) = e^{-x^2}$ fonksiyonu $D(T)$ kümesinden midir? Neden?