

KONU 12. ÇARPMA OPERATÖRLERİNİN REZOLVENTİ VE SPEKTRUMU

B ile $L_2(\mathbb{R})$ uzayında φ fonksiyonuna çarpma operatörünü gösterelim, yani

$$Bf(x) = \varphi(x)f(x), \quad f \in D(B)$$

ve

$$D(B) = \{f : f \in L_2(\mathbb{R}), \varphi f \in L_2(\mathbb{R})\}$$

olsun.

Teorem 12.1. B operatörünün spektrumu çarpma fonksiyonunun değer kümesi ile çakışır, yani

$$\sigma(B) = R(\varphi).$$

İspat. $f \in D(B)$ olmak üzere,

$$Bf - \mu f = g \tag{12.1}$$

denklemini çözerek B operatörünün rezolvent kümesini ve rezolvent operatörünü bulalım. (12.1) denkleminde

$$\begin{aligned} \varphi f - \mu f &= g \\ (\varphi - \mu)f &= g \\ [\varphi(x) - \mu]f(x) &= g(x) \\ f(x) &= \frac{1}{\varphi(x) - \mu}g(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonucu eşitlikten

$$\rho(B) = \{\mu : \mu \neq \varphi(x)\} = \mathbb{C} \setminus R(\varphi)$$

bulunur. $\mu \in \rho(B)$ için

$$R_\mu(B)f(x) = \frac{1}{\varphi(x) - \mu}g(x)$$

olur, yani B operatörünün rezolventi $\frac{1}{\varphi(x) - \mu}$ fonksiyonuna çarpma operatörüdür.

Diğer taraftan

$$\sigma(B) = \mathbb{C} \setminus \rho(B) = R(\varphi)$$

bulunur. Ayrıca $\mu \in \rho(B)$ için $R_\mu(B)$ mevcut, sınırsız ve

$$\overline{D[R_\mu(B)]} = L_2(\mathbb{R})$$

olduğundan

$$\sigma(B) = \sigma_c(B)$$

elde edilir.

Alıştırmalar.

1) $L_2(\mathbb{R})$ uzayında

$$Tf(x) = x^2f(x), f \in D(T)$$

operatörünün spektrumunu, sürekli spektrumunu, rezolvent kümesini ve rezolvent operatörünü bulunuz.

2). $L_2(\mathbb{R})$ uzayında

$$Kf(x) = \sin xf(x), f \in D(K)$$

operatörünün

a) $D(K)$ tam kümesini bulunuz.

b) K operatörünün spektrumunu, rezolvent kümesini ve rezolvent operatörünü elde ediniz.