KONU 14. DİFERENSİYEL OPERATÖR VE SPEKTRUMU

$L_2(\mathbb{R})$ uzayında x^2 fonksiyonuna çarpma operatörünü T ile, $l_0(y) = -y''$, $x \in \mathbb{R}$ diferensiyel ifadesinin yardımı ile tanımlanan operatörü L_o ile, Fourier dönüşümünü (Fourier operatörünü) ise F ile gösterelim.

$$\begin{aligned} T &: L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}), \quad Tf(x) = x^2 f(x),\ f \in D(T) \\ D(T) &= \left\{ f : f \in L_2(\mathbb{R}),\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| x^2 f(x) \right|^2 dx < \infty \right\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} L_0 &: L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}), \\ D(L_0) &= \left\{ y : y \in L_2(\mathbb{R}),\ \begin{array}{ll} 1. & y'' \text{ mevcut} \\ 2. & y'' \in L_2(\mathbb{R}) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

olarak tanımlansın.

$$\begin{aligned} F &: L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}) \\ Ff(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixt} dx \\ F^{-1}f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ixt} dx \end{aligned}$$

F operatörünün uniter operatör olduğu biliniyor. Ayrıca

$$F(y''(t)) = -t^2 Fy(t)$$

olduğundan Fourier dönüşümünün özelliklerinden bilinmektedir.

Her $y \in D(L_0)$ için

$$FL_0 y = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} y''(x) e^{-ixt} dx$$

olur. Burada iki kere kısmi integrasyonu kullanarak

$$FL_0 y = TFy$$

olduğunu elde ederiz. Sonuncu eşitlikten

$$L_0 = F^{-1} T F$$

olur, yani

$$L_0 \backsim T$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\sigma(L_0) &= \sigma_c(L_0) = [0,\infty) \\ \rho(L_0) &= \mathbb{C}\backslash[0,\infty)\end{aligned}$$

eşitlikleri çıkar.

Alıştırma.

1) M ile $L_2(\mathbb{R})$ uzayında $m(y) = iy^{'}$, $x \in \mathbb{R}$ diferensiyel ifadesinin yardımı ile tanımlanan operatörü, K ile x fonksiyonuna çarpma operatörünü gösterelim.

a) $M \backsim K$ olduğunu ispatlayınız.

b) $\sigma(M)$, $\sigma_c(M)$, $\rho(M)$ kümelerini bulunuz.