KONU 1. L_1 **VE** L_2 **UZAYLARI**

$$\int_0^\infty f(x)\,dx := \lim_{t\to\infty}\int_0^t f(x)\,dx$$

olarak tanımlanır. Eğer $\lim_{t\to\infty}\int_0^t f(x)\,dx$ mevcut ise $\int_0^\infty f(x)\,dx$ integraline yakınsaktır denir.

$$\begin{aligned}
L_1(0,\infty) \quad &: \quad = \left\{ f : \int_0^\infty |f(x)|\,dx < \infty \right\}, \\
L_2(0,\infty) \quad &: \quad = \left\{ g : \int_0^\infty |g(x)|^2\,dx < \infty \right\} \\
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \quad &: \quad = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 f(x)\,dx + \lim_{u\to\infty}\int_0^u f(x)\,dx \\
L_1(-\infty,\infty) \quad &: \quad = \left\{ f : \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty \right\}, \\
L_2(-\infty,\infty) \quad &: \quad = \left\{ g : \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2\,dx < \infty \right\}
\end{aligned}$$

şeklindedir. $L_1(0,\infty)$ uzayı Banach uzayı olup bu uzayda norm

$$\|f\|_1 := \int_0^\infty |f(x)|\,dx$$

olarak tanımlanır. $L_2(0,\infty)$ uzayı ise bir Hilbert uzayıdır ve bu uzayda iç çarpım

$$(f,g) := \int_0^\infty f(x)\,\overline{g(x)}dx$$

gibi tanımlanır.

Fonksiyonların $L_1(0,\infty)$ ve $L_2(0,\infty)$ uzaylarından olup olmadığını göstermek için karşılaştırma testi, limit testi veya diğer testler kullanılabilir.

Soru 1.1. $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ve $f(x) = e^{-x}\sin x$ fonksiyonu

a) $L_1(0,\infty)$ uzayından mıdır? Neden?

b) $L_2(0,\infty)$ uzayından mıdır? Neden?

Çözüm. a) Karşılaştırma testini kullanalım:

$$\left|e^{-x}\sin x\right| \leq e^{-x}$$

olduğundan $f \in L_1(0,\infty)$ olur.

b) Benzer biçimde

$$\left|e^{-x}\sin x\right|^2 \leq e^{-2x}$$

olduğundan $f \in L_2(0,\infty)$ bulunur.

Soru 1.2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ fonksiyonu $L_1(-\infty,\infty)$ ve $L_2(-\infty,\infty)$ uzaylarından mıdır? Neden?

Çözüm. Limit testine göre

$$\lim_{x\to\infty} x\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1, \quad (\gamma = 1,\ a = 1)$$

olduğundan $f \notin L_1(-\infty,\infty)$ bulunur. Diğer yandan yine limit testi gereğince

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^2\frac{1}{1+x^2} = 1$$

olduğundan $f \in L_2(-\infty,\infty)$ olur.

Alıştırmalar

1. $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ve $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\cos x$ fonksiyonu $L_1(0,\infty)$ ve $L_2(0,\infty)$ uzaylarından mıdır? Neden?

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $f(x) = e^{-|x|}$ fonksiyonunun $L_1(-\infty,\infty)$ ve $L_2(-\infty,\infty)$ uzaylarından olup olmadığını inceleyiniz.