KONU 2. PARAMETREYE BAĞLI İNTEGRALLER

Tanım 2.1. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, \lambda) dx \tag{2.1}$$

integraline parametreye bağlı integral denir.

Tanım 2.2. Eğer her $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{0} f(x, \lambda) dx + \lim_{u \to \infty} \int_{0}^{u} f(x, \lambda) dx$$

mevcut ise (2.1) integraline yakınsaktır denir ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, \lambda) dx := \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{0} f(x, \lambda) dx + \lim_{u \to \infty} \int_{0}^{u} f(x, \lambda) dx$$

olarak gösterilir.

Tanım 2.3. Eğer

$$|f(x, \lambda)| \leq g(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

ve $g \in L_1(\mathbb{R})$ ise (2.1) integraline λ ya göre $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün ve mutlak yakınsaktır denir.

Soru 2.4. $I = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\lambda + x) e^{-|x|} dx$ integralinin λ ya göre $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$$\sin(\lambda + x) e^{-|x|} \leq e^{-|x|}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

olduğundan integral düzgün yakınsaktır.

Soru 2.5. $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} \frac{1}{1 + \lambda^2 + |x|} dx$ integrali λ ya göre $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak mıdır? Gösteriniz.

Çözüm.

$$\left| \frac{1}{1 + x^2} \frac{1}{1 + \lambda^2 + |x|} \right| \leq \frac{1}{1 + x^2}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} dx < \infty$$

olduğundan integral düzgün yakınsaktır.

Soru 2.6. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-i\lambda x}dx$ integralinin λ ya göre $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.

$$\left|e^{-x^2}e^{-i\lambda x}\right| \leq e^{-x^2},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

ve

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx < \infty$$

olduğundan integral düzgün yakınsaktır.

Alıştırmalar

1. $f \in L_1(-\infty, \infty)$ olmak üzere

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx,\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\lambda x)dx$$

integrallerinin λ ya göre $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu ispatlayınız.

2. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\sin(\lambda x)dx$ integralinin λ ya göre $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.