KONU 3. FOURİER DÖNÜŞÜMLERİ

Tanım 3.1. $f \in L_1(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$g(\lambda) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx \tag{3.1}$$

gibi tanımlanan g fonksiyonuna f fonksiyonunun Fourier dönüşümü denir ve

$$g(\lambda) = F(f)(\lambda)$$

olarak gösterilir. Eğer $g \in L_1(\mathbb{R})$ ise

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$$

dönüşümüne ters Fourier dönüşümü denir ve F^{-1} ile gösterilir.

$$\left| f(x) e^{-i\lambda x} \right| \leq |f(x)|$$

olduğundan (3.1) integrali λ ya göre $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün ve mutlak yakınsaktır.

Tanım 3.2. $f \in L_1(\mathbb{R})$ ve $(f_n) \subset L_1(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)| \, dx = 0$$

ise, (f_n) dizisi f fonksiyonuna $L_1(\mathbb{R})$ üzerinde yakınsaktır denir ve

$$f_n \xrightarrow{L_1} f$$

olarak gösterilir.

Tanım 3.3. $f \in L_2(\mathbb{R})$, $(f_n) \subset L_2(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx = 0$$

ise

$$f_n \xrightarrow{L_2} f$$

denir ve $l.i.m. f_n(x) = f(x)$ olarak gösterilir.

Tanım 3.4. $f \in L_2(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$g_n(\lambda) := \int_{-n}^{n} f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

gibi tanımlansın.

$$g(\lambda) := l.i.m.g_n(\lambda)$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun $L_2(\mathbb{R})$ de Fourier dönüşümü denir ve

$$g(\lambda) := F(f)(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx$$

olarak gösterilir.

Soru 3.5. $f \in L_1(-\infty, \infty)$ ise $g(\lambda) = F(f)(\lambda)$ fonksiyonunun sürekli ve sınırlı olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx \text{ olup } |g(\lambda)| \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = M$$

olduğundan g fonksiyonu sınırlıdır. $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} g(\lambda) = \lim_{\lambda\to\lambda_0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \lim_{\lambda\to\lambda_0} e^{-i\lambda x}dx = g(\lambda_0)$$

olduğundan g fonksiyonu süreklidir.

Alıştırmalar

1. $(f_n) \subset L_1(\mathbb{R})$ ve $f_n \underrightarrow{L_1} f$ ise, bu durumda $g_n = F(f_n)$ fonksiyonunun $g = F(f)$ fonksiyonununa düzgün yakınsak olduğunu ispatlayınız.

2. $f, f^{'} \in L_1(\mathbb{R})$ ise $\lim\limits_{\lambda\to\pm\infty} g(\lambda) = 0$ olduğunu gösteriniz (Riemann-Lebesgue Lemması).