KONU 4. FOURİER DÖNÜŞÜMLERİNİN ÖZELLİKLERİ

Tanım 4.1. $f_1, f_2 \in L_1(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(x-t) dt$$

fonksiyonuna f_1 ve f_2 fonksiyonlarının konvolusyonu denir ve $(f_1 * f_2)(x)$ olarak gösterilir.

Teorem 4.2. $f_1, f_2 \in L_1(\mathbb{R})$ ise $f(x) = (f_1 * f_2)(x)$ olmak üzere $f \in L_1(\mathbb{R})$ olur.

İspat.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f_1(t)|\, dt. \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f_2(u)|\, du$$

eşitliğinden ispat elde edilir.

Teorem 4.3. $f_1, f_2 \in L_1(\mathbb{R})$ ise

$$F[(f_1 * f_2)(x)] = F(f_1).F(f_2)$$

sağlanır.

İspat. Teoremin ispatı

$$F[(f_1 * f_2)(x)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{-i\lambda x} dx. \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(u) e^{-i\lambda u} du$$

eşitliğinden elde edilir.

Teorem 4.4. $f, f^{'} \in L_1(\mathbb{R})$ ise

$$F(f^{'}) = i\lambda F(f)$$

gerçeklenir.

İspat.

$$\begin{aligned} F(f^{'}) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{'}(x) e^{-i\lambda x} dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} df(x) \\ &= f(x) e^{-i\lambda x} \;|_{x=-\infty}^{\infty} + i\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = i\lambda F(f) \end{aligned}$$

sağlanır.

Teorem 4.5. $f \in L_1(\mathbb{R})$, $xf(x) \in L_1(\mathbb{R})$ ise, $g \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R})$ olur ve

$$g^{'}(\lambda) = F[-ixf(x)]$$

sağlanır.

İspat.

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx$$

olmak üzere düzgün yakınsaklık özelliğinden

$$\begin{aligned} g^{'}(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} (-ix)f(x)e^{-i\lambda x}dx = F[-ixf(x)] \end{aligned}$$

elde edilir.

Alıştırmalar

1. $f, f^{'}, ..., f^{(k)} \in L_1(\mathbb{R})$ ise,

$$F(f^{(k)}) = (i\lambda)^k F(f)$$

olduğunu ispatlayınız.

2. $f \in L_1(\mathbb{R})$, $xf(x) \in L_1(\mathbb{R}), ..., x^p f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ ise, $g(\lambda) = F(f)(\lambda)$ fonksiyonu için $g^{(p)}$ fonksiyonunun mevcut ve

$$g^{(p)}(\lambda) = F[(-ix)^p f(x)]$$

olduğunu gösteriniz.