KONU 7. JOST ÇÖZÜMÜ VE ÖZELLİKLERİ

$$-y^{''}+q\left(x\right) y=\lambda^{2}y,\quad 0\leq x<\infty \tag{7.1}$$

$$y(0)=0 \tag{7.2}$$

sınır değer problemini göz önünde bulunduralım, burada $q-$reel değerli bir fonksiyon ve λ spektral parametre olup

$$\int\limits_{0}^{\infty} x\left\vert q(x)\right\vert dx<\infty \tag{7.3}$$

koşulu sağlanır. (7.1) denkleminin

$$\lim_{x\rightarrow\infty} e^{-i\lambda x}y(x,\lambda)=1,\ \ \lambda\in\mathbb{R} \tag{7.4}$$

koşulunu gerçekleyen çözümünü $e(x,\lambda)$ ile gösterelim.

Teorem 7.1. $(7.1),(7.4)$ probleminin çözümü $e(x,\lambda)$,

$$e(x,\lambda)=e^{i\lambda x}+\int\limits_{x}^{\infty}\frac{\sin(\lambda(t-x))}{\lambda}q(t)e(t,\lambda)dt \tag{7.5}$$

integral denkleminin de çözümüdür. Bunun tersi de doğrudur.

İspat. $(7.5)\Longrightarrow(7.1),(7.4)$ olduğunu gösterelim:

$$\lim_{x\rightarrow\infty} e(x,\lambda)e^{-i\lambda x}=1,\ \ \lambda\in\mathbb{R}$$

olduğu açıktır.

$$\begin{aligned}
e^{'}(x,\lambda) &= i\lambda e^{i\lambda x}-\int\limits_{x}^{\infty}\cos(\lambda(t-x))q(t)e(t,\lambda)dt\\
e^{''}(x,\lambda) &= -\lambda^{2}e^{i\lambda x}-\int\limits_{x}^{\infty}\lambda\sin(\lambda(t-x))q(t)e(t,\lambda)dt+q(x)e(x,\lambda)\\
e^{''}(x,\lambda) &= -\lambda^{2}\left[e^{i\lambda x}+\int\limits_{x}^{\infty}\frac{\sin(\lambda(t-x))}{\lambda}q(t)e(t,\lambda)dt\right]+q(x)e(x,\lambda)\\
-e^{''}(x,\lambda)+q(x)e(x,\lambda) &= \lambda^{2}e(x,\lambda),\quad 0\leq x<\infty
\end{aligned}$$

elde edilir, buradan da teorem ispatlanır.

$$\sigma(x) := \int_x^\infty |q(t)|\, dt,\ \ \sigma_1(x) := \int_x^\infty \sigma(t)dt \tag{7.6}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım.

$e(x,\lambda)$ fonksiyonu

$$e(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K(x,t)e^{i\lambda t}dt,\ \ \lambda \in \mathbb{R} \tag{7.7}$$

biçiminde gösterilir, burada

$$K(x,t) \le c\sigma(\frac{x+t}{2}), \tag{7.8}$$

$$|K_x(x,t)|\,, |K_t(x,t)| \le \frac{1}{4}\left| q(\frac{x+t}{2}) + c\sigma(\frac{x+t}{2})\right| \tag{7.9}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir. $e(x,\lambda)$ fonksiyonuna Jost çözümü denir.

Teorem 7.2. $K(x,.) \in L_1(x,\infty)$, $K_x(x,.) \in L_1(x,\infty)$ gerçeklenir.

İspat. (7.8) eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
\int_x^\infty |K(x,t)|\, dt &\le c\int_x^\infty \sigma(\frac{x+t}{2})dt \le c\int_x^\infty \int_{\frac{x+t}{2}}^\infty |q(s)|\, dsdt \\
&\le c\int_x^\infty \int_t^\infty |q(s)|\, dsdt = c\int_x^\infty |q(s)| \int_x^s dtds \\
&= c\int_x^\infty (s-x)\,|q(s)|\, ds \le c\int_0^\infty s\,|q(s)|\, ds < \infty
\end{aligned}$$

olur, yani $K(x,.) \in L_1(x,\infty)$ sağlanır. (7.9) eşitsizliği kullanılarak da benzer biçimde $K_x(x,.) \in L_1(x,\infty)$ olduğu gösterilir.

Alıştırmalar.

1. $(7.1), (7.4) \Longrightarrow (7.5)$ olduğunu ispatlayınız.

2. (7.7) eşitliğini ve Teorem 7.2 yi kullanarak $e(x,\lambda)$ nın λ ya göre $\mathbb{C}_+ := \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im}\lambda > 0\}$ yarıdüzlemine analitik devama sahip olduğunu gösteriniz. Dolayısıyla

$$e(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K(x,t)e^{i\lambda t}dt,\ \ \lambda \in \overline{\mathbb{C}_+}$$

eşitliğinin gerçeklendiğini gösteriniz.

3. (7.6) ile tanımlanan integrallerin yakınsak olduğunu ispatlayınız.