KONU 10. STURM-LİOUVİLLE DENKLEMİNİN DİĞER ÇÖZÜMLERİ

$$-y^{''}+q(x)y=\lambda^2 y, \quad 0\leq x<\infty \tag{10.1}$$

denklemini göz önünde bulunduralım. (10.1) denkleminin

$$y(0)=0, \ y'(0)=1 \tag{10.2}$$

ve

$$y(0)=1, \ y^{'}(0)=0 \tag{10.3}$$

başlangıç koşullarını gerçekleyen çözümlerini sırasıyla $S(x,\lambda)$ ve $C(x,\lambda)$ ile gösterelim.

Teorem 10.1 $S(x,\lambda)$ ve $C(x,\lambda)$ çözümleri aşağıdaki integral denklemleri gerçekler:

$$S(x,\lambda)=\frac{\sin(\lambda x)}{\lambda}+\int_0^x \frac{\sin(\lambda(x-t))}{\lambda}q(t)S(t,\lambda)dt \tag{10.4}$$

$$C(x,\lambda)=\cos(\lambda x)+\int_0^x \frac{\sin(\lambda(x-t))}{\lambda}q(t)C(t,\lambda)dt. \tag{10.5}$$

İspat. (10.4) denkleminden $S(0,\lambda)=0$ ve

$$S^{'}(x,\lambda)=\cos(\lambda x)+\int_0^x \cos(\lambda(x-t))q(t)S(t,\lambda)dt$$

elde edilir. Sonuncu denklemden $S^{'}(0,\lambda)=1$ ve

$$\begin{aligned} S^{''}(x,\lambda) &= -\lambda\sin(\lambda x)-\int_0^x \lambda\sin(\lambda(x-t))q(t)S(t,\lambda)dt+q(x)S(x,\lambda) \\ &= -\lambda^2\left[\frac{\sin(\lambda x)}{\lambda}+\int_0^x \frac{\sin(\lambda(x-t))}{\lambda}q(t)S(t,\lambda)dt\right]+q(x)S(x,\lambda) \\ &= -\lambda^2 S(x,\lambda)+q(x)S(x,\lambda) \end{aligned}$$

olup

$$-S^{''}(x,\lambda)+q(x)S(x,\lambda)=\lambda^2 S(x,\lambda)$$

elde edilir. Bu ise (10.4) eşitliğini ispatlar. (10.5) eşitliğinin gerçeklendiği de benzer şekilde gösterilir.

$S(x,\lambda)$ ve $C(x,\lambda)$ fonksiyonları λ nın tam fonksiyonlarıdır.

Teorem 10.2 Aşağıdaki eşitlikler gerçeklenir:

$$\begin{array}{ll} \textbf{a)} & W\left[S(x,\lambda),C(x,\lambda)\right]=-1,\ \lambda\in\mathbb{C} \\ \textbf{b)} & W\left[e(x,\lambda),e(x,-\lambda)\right]=-2i\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R} \\ \textbf{c)} & W\left[e(x,\lambda),S(x,\lambda)\right]=e(0,\lambda),\ \lambda\in\overline{\mathbb{C}}_{+}. \end{array}$$

İspat. (10.1) denkleminin iki çözümünün Wronskiyeninin x değişkeninden bağımsız olduğunu kullanalım.

a) $W\left[S(x,\lambda),C(x,\lambda)\right] = S(0,\lambda),C^{'}(0,\lambda) - S^{'}(0,\lambda),C(0,\lambda) = -1,\ \lambda\in\mathbb{C}$ bulunur.

b) $\lambda\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} W\left[e(x,\lambda),e(x,-\lambda)\right] &= e(x,\lambda)e^{'}(x,-\lambda)-e^{'}(x,\lambda)e(x,-\lambda) \\ &= \lim_{x\to\infty}\left[e(x,\lambda)e^{-i\lambda x}e^{'}(x,-\lambda)e^{i\lambda x}-e^{'}(x,\lambda)e^{-i\lambda x}e(x,-\lambda)e^{i\lambda x}\right] \\ &= -i\lambda-i\lambda \\ &= -2i\lambda \end{aligned}$$

elde edilir.

c) Benzer şekilde ispatlanır.

Alıştırmalar.

1) (10.5) integral denkleminin herbir çözümünün (10.1), (10.3) başlangıç değer probleminin bir çözümü olduğunu gösteriniz.

2)

$$\left\{\begin{array}{c} -y^{''}+q(x)y=\lambda^2 y \quad x\in[0,1)\cup(1,\infty) \\ y(0)=0,\ y'(0)=1 \\ y(1^+)=\gamma_1 y(1^-) \\ y^{'}(1^+)=\gamma_2 y^{'}(1^-),\ \gamma_1\gamma_2\in\mathbb{R},\ \gamma_1\gamma_2\neq 0 \end{array}\right.$$

başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.