KONU 13. SAÇILIM FONKSİYONU VE SAÇILIM VERİLERİ

$$e(\lambda) = 1 + \int_0^\infty K(0,t)e^{i\lambda t}dt, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Jost fonksiyonu olmak üzere

$$S(\lambda) = \frac{\overline{e(\lambda)}}{e(\lambda)}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

fonksiyonuna

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \quad 0 \le x < \infty \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{13.1}$$

sınr değer probleminin saçılım fonksiyonu denir.

Teorem 13.1 Her $\lambda \in \mathbb{R}$ için
a) $S(-\lambda) = [S(\lambda)]^{-1} = \overline{S(\lambda)}$
b) $|S(\lambda)| = 1$
gerçeklenir.
İspat. Her $\lambda \in \mathbb{R}$ için
a) $S(-\lambda) = \dfrac{e(\lambda)}{e(-\lambda)} = [S(\lambda)]^{-1} = \dfrac{e(\lambda)}{\overline{e(\lambda)}} = \left[\dfrac{\overline{e(\lambda)}}{e(\lambda)}\right] = \overline{S(\lambda)}$
b) $[S(\lambda)]^{-1} = \overline{S(\lambda)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ eşitliğinden $|S(\lambda)| = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ elde edilir.
Teorem 13.2

$$S(0) = \begin{cases} 1 & , \quad e(0) \neq 0 \\ -1 & , \quad e(0) = 0 \end{cases}$$

eşitliği gerçeklenir.
İspat.
a) $e(0) \neq 0$ ise

$$S(0) = \frac{e(0)}{e(0)} = 1$$

elde edilir.
b) $e(0) = 0$ olsun. Bu durumda

$$e(0) = 1 + \int_0^\infty K(0,t)dt = 0$$

olur. $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} e(\lambda) &= 1+\int_0^\infty K(0,t)e^{i\lambda t}dt = 1-\int_0^\infty e^{i\lambda t}d\left\{\int_t^\infty K(0,u)du\right\} \\ &= 1-\int_t^\infty K(0,u)du.e^{i\lambda t}\mid_{t=0}^{\infty} +i\lambda\int_0^\infty\int_t^\infty K(0,u)du.e^{i\lambda t}dt \\ &= 1+\int_0^\infty K(0,u)du+i\lambda\int_0^\infty K_1(t)e^{i\lambda t}dt \\ &= i\lambda\int_0^\infty K_1(t)e^{i\lambda t}dt \end{aligned}$$

elde edilir, burada

$$K_1(t) := \int_t^\infty K(0,u)du$$

olarak tanımlanır. Bu durumda

$$e(\lambda) = i\lambda\int_0^\infty K_1(t)e^{i\lambda t}dt,\ \lambda \in \mathbb{R} \tag{13.2}$$

olur. (13.2) den

$$e(\lambda) = i\lambda A(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R} \tag{13.3}$$

elde edilir, burada

$$A(\lambda) := \int_0^\infty K_1(t)e^{i\lambda t}dt$$

olarak tanımlanır. (13.3) den, $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$S(\lambda) = \frac{e(-\lambda)}{e(\lambda)} = -\frac{A(-\lambda)}{A(\lambda)} \tag{13.4}$$

bulunur.

$$A(\lambda)e^{'}(0,-\lambda)+A(-\lambda)e^{'}(0,\lambda) = 2$$

eşitliğinden $A(0) \neq 0$ çıkar. (13.4) eşitliğinden $e(0) = 0$ için

$$S(0) = -1$$

elde edilir. Teorem ispatlanır.

$\lambda_k = ia_k,\ k = 1, 2, ..., n,\ a_k > 0,\ e(\lambda_k) = 0$ ve

$$m_k^{-2} = \int_0^{\infty} |e(x, ia_k|^2\, dx$$

olmak üzere

$$\{a_k, m_k, k = 1, 2, .., n; S(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$$

kümesine (13.1) Sturm-Liouville probleminin saçılım verileri denir.

Alıştırma.

1)

$$\begin{cases} -y^{''} + q(x)y = \lambda^2 y, \quad x \in [0,1) \cup (1, \infty) \\ y(0) = 0 \\ y(1^+) = \gamma_1 y(1^-) \\ y^{'}(1^+) = \gamma_2 y^{'}(1^-),\ \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R},\ \gamma_1\gamma_2 \neq 0 \end{cases}$$

sınır değer probleminin saçılım fonksiyonunu bulunuz ve özelliklerini inceleyiniz.