KONU 14. LEVİNSON FORMÜLÜ

$$e(\lambda) = 1 + \int_0^\infty K(0,t)e^{i\lambda t}dt, \ \ \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$$

Jost fonksiyonu olmak üzere,

$$e(\lambda) = re^{i\eta(\lambda)}$$

ve

$$\eta(-\lambda) = -\eta(\lambda)$$

sağlanır.

Teorem 14.1 Aşağıdaki eşitlikler gerçeklenir:

a) Eğer $e(0) \neq 0$ ise

$$\frac{2\left[\eta(\infty) - \eta(0)\right]}{2\pi} = n$$

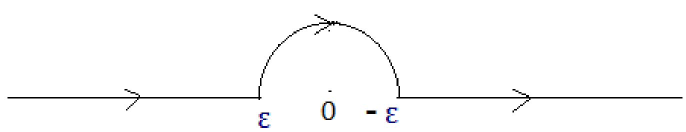
olur.

b) Eğer $e(0) = 0$ ise

$$\frac{2\left[\eta(\infty) - \eta(0)\right]}{2\pi} = n + \frac{1}{2}$$

olur, burada n sayısı Jost fonksiyonunun $\mathbb{C}_+$ daki sıfırlarının sayısıdır.

İspat. Γ ile



çevresini gösterelim. Argüment ilkesinden

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{'}(\lambda)}{e(\lambda)}d\lambda = n$$

veya

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} d\ln e(\lambda) + \int_{C_\epsilon} d\ln e(\lambda) + \int_\epsilon^\infty d\ln e(\lambda)\right] = n \tag{14.1}$$

çıkar.

a) $e(0) \neq 0$ olsun.

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{C_\epsilon} d \ln e(\lambda) = i\left[\eta(0) - \eta(0)\right] = 0$$

olup (14.1) den

$$\begin{aligned} 2\pi i n &= \lim_{\epsilon \to 0} i\left\{\left[\eta(-\epsilon) - \eta(-\infty)\right] + \left[\eta(\infty) - \eta(\epsilon)\right]\right\} \\ &= 2i\left[\eta(\infty) - \eta(0)\right] \end{aligned}$$

elde edilir.

b) $e(0) = 0$ olduğunda

$$e(\lambda) = i\lambda A(\lambda),\ e(-\lambda) = -i\lambda A(-\lambda),\ A(0) \neq 0$$

$$\arg e(\lambda) = \eta(\lambda) = \frac{\pi}{2} + \varphi + \arg A(\lambda),\ \eta(-\lambda) = \frac{3\pi}{2} + \varphi + \arg A(-\lambda)$$

eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{C_\epsilon} d \ln e(\lambda) &= \lim_{\epsilon \to 0} i\left[\eta(\epsilon) - \eta(-\epsilon)\right] \\ &= i \lim_{\epsilon \to 0}\left[\frac{\pi}{2} + \arg A(\epsilon) - \frac{3\pi}{2} - \arg A(-\epsilon)\right] = -i\pi \end{aligned} \tag{14.2}$$

bulunur. (14.1) denklemi kullanılarak

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{i\left[\eta(-\epsilon) - \eta(-\infty)\right] + i\left[\eta(\infty) - \eta(\epsilon)\right] + \int\limits_{C_\epsilon} d \ln e(\lambda)\right\} = n$$

elde edilir. Sonuncu eşitlikten ve (14.2) den

$$\frac{2\left[\eta(\infty) - \eta(0)\right]}{2\pi} = n + \frac{1}{2}$$

bulunur ki, bu da teoremin ispatıdır.

Sonuç 14.2

$$\frac{2\left[\eta(\infty) - \eta(0)\right]}{2\pi} = n + \begin{cases} 0 & , \quad e(0) \neq 0 \\ \frac{1}{2} & , \quad e(0) = 0 \end{cases} \tag{14.3}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 14.3 $S(\lambda)$ saçılım fonksiyonu olmak üzere

$$\frac{\ln S(0) - \ln S(\infty)}{2\pi i} = n + \frac{1 - S(0)}{4} \tag{14.4}$$

sağlanır.

İspat.

$$S(\lambda)=\frac{e(-\lambda)}{e(\lambda)}=e^{-2i\eta(\lambda)} \text{ ve } \ln S(\lambda)=-2i\eta(\lambda)$$

olduğundan

$$\frac{2\left[\eta(\infty)-\eta(0)\right]}{2\pi}=\frac{\ln S(0)-\ln S(\infty)}{2\pi i} \tag{14.5}$$

bulunur. Diğer taraftan Teorem 13.2 kullanılarak

$$\frac{1-S(0)}{4}=\begin{cases} 0 & , \quad e(0)\neq 0 \\ \frac{1}{2} & , \quad e(0)=0 \end{cases} \tag{14.6}$$

elde edilir. (14.5) ve (14.6) eşitlikleri (14.3) denkleminde dikkate alınarak (14.4) formülü ispatlanır.

(14.4) formülüne Levinson formülü denir.

Alıştırma.

1) Jost fonksiyonu için

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{'}(\lambda)}{e(\lambda)}d\lambda=n$$

formülünü ispatlayınız.