KONU 1. LİNEER OPERATÖRLER

Tanım 1.1. X ve Y normlu uzaylar, $A : X \to Y$ ise tanım kümesi $D(A) \subset X$ olan bir dönüşüm olmak üzere, her α, β skalerleri ve her $x, y \in D(A)$ için

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

ise A' ya lineer operatör denir.

Soru 1.1. $X = C[a,b]$, $Y = \mathbb{R}$, $D(A) = C[a,b]$ ve her $f \in C[a,b]$ için

$$Af = \int_a^b f(x)\,dx$$

bir lineer operatördür.

Soru 1.2. $X = Y = C[a,b]$, $D(A) = C[a,b]$ ve her $g \in C[a,b]$ için

$$Tg(x) = xg(x)$$

bir lineer operatör müdür? Neden?

Çözüm. Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve her $f, g \in C[a,b]$ için

$$T[\alpha f(x) + \beta g(x)] = x[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha x f(x) + \beta x g(x) = \alpha T f(x) + \beta g(x)$$

elde edilir.

Soru 1.3. $X = C'[a,b]$, $Y = C[a,b]$, $D(A) = C'[a,b]$ ve $\forall f \in C'[a,b]$ için

$$Af(x) = f'(x)$$

bir lineer operatör olduğunu gösteriniz.

Çözüm. α, β reel sayılar, f ve g ise $C'[a,b]$' nin keyfi elemanları olmak üzere

$$A[\alpha f(x) + \beta g(x)] = [\alpha f(x) + \beta g(x)]' = \alpha f'(x) + \beta g'(x) = \alpha Af(x) + \beta Ag(x)$$

gerçeklenir.

Alıştırmalar

1. $T : l_2 \to l_2$ olmak üzere $(x_1, x_2 ...,) \in l_2$ için

$$T(x_1, x_2, x_3, ...,) = (x_2, x_3, ...,)$$

lineer operatör olduğunu ispatlayınız.

2. $A : L_2(0,\pi) \to L_2(0,\pi)$, $K(x,t)$ ise $L_2(0,\pi) \times L_2(0,\pi)$ uzayının elemanı olsun. Her $f \in L_2(0,\pi)$ için

$$Af(x) = \int_0^\pi K(x,t) f(t)\,dt$$

bir lineer operatör olduğunu gösteriniz.

3. $A : L_2\left(0,\pi\right) \to L_2\left(0,\pi\right),\ D\left(A\right) = C^2\left[0,\pi\right]$ ve

$Af\left(x\right) = -f^{''}\left(x\right),\ \forall f \in D\left(A\right)$ ile tanımlanan A' nın bir lineer operatör olduğunu ispatlayınız.

4. $A, B : X \to Y$ birer lineer operatör ise $A + B$' de lineer operatör müdür? Neden?