

KONU 2. STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ

$L_2(0, \pi)$ uzayında

$$l(y) = -y'' + q(x)y, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

diferansiyel ifadesinin yardımı ile

$$L : L_2(0, \pi) \rightarrow L_2(0, \pi)$$

operatörü tanımlayalım, burada q reel değerli ve sürekli fonksiyondur.

$D(L) \subset L_2(0, \pi)$ olmak üzere $D(L)$ ile aşağıdaki koşulları sağlayan uzayı gösterelim:

1. Her $y \in D(L)$ için, y fonksiyonu ikinci mertebeden diferansiyellenebilir olsun.
2. $l(y) \in L_2(0, \pi)$ koşulu $y \in D(L)$ için sağlansın.
3. h ve H reel sayıları için

$$\begin{cases} y'(0) - hy(0) = 0 \\ y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \end{cases}$$

sınır koşulları gerçekleşsin.

$$D(L) = \left\{ \begin{array}{l} y, \quad y \in L_2(0, \pi) \\ \begin{array}{l} 1. y'' \text{ mevcut} \\ 2. l(y) \in L_2(0, \pi) \\ 3. y'(0) - hy(0) = 0 \\ y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \end{array} \end{array} \right\}$$

Tanım 2.1. Her $y \in D(L)$ için

$$Ly = l(y)$$

olarak tanımlanan operatöre Sturm-Liouville operatörü denir.

Soru 2.2. $L_2(0, \pi)$ uzayında

$$l_0(y) = -y'', \quad 0 \leq x \leq \pi$$

diferansiyel ifadesinin ve

$$y(0) = y(\pi) = 0$$

sınır koşullarının yardımı ile tanımlanan operatör L_0 olmak üzere

- a) $D(L_0)$ tanım kümesini yazınız.
- b) $f : [0, \pi] \rightarrow R$ ve $f(x) = \sin 2x$ fonksiyonun $D(L_0)$ tanım kümesinden midir? Neden?
- c) $g : [0, \pi] \rightarrow R$ ve $g(x) = \cos x$ fonksiyonun $D(L_0)$ kümesinden midir? Neden?

Çözüm.

a)

$$D(L_0) = \left\{ y, \quad y \in L_2(0, \pi) \quad \begin{array}{l} 1. y'' \text{ mevcut} \\ 2. y'' \in L_2(0, \pi) \\ 3. y(0) = y(\pi) = 0 \end{array} \right\}$$

b) f fonksiyonunun $D(L_0)$ uzayından olması için f in sınır koşullarını sağlamasını kontrol etmemiz yeterlidir.

$$\begin{aligned} f(0) &= \sin 0 = 0 \\ f(\pi) &= \sin 2\pi = 0 \end{aligned}$$

olduğundan $f \in D(L_0)$ gerçekleşir.

c)

$$g(0) = \cos 0 = 1$$

olduğundan g fonksiyonu sınır koşulunu sağlamıyor. Bu nedenle $g \notin D(L_0)$.

Alıştırmalar

1. A ile $L_2(0, 1)$ uzayında

$$l_0(y) = -y'', \quad 0 \leq x \leq 1$$

diferansiyel ifadesinin ve

$$y(0) = y'(1) = 0$$

sınır koşullarının yardımı ile tanımlanan operatörü gösterelim.

a) $D(A)$ tanım kümesini yazınız.

b) $f : [0, 1] \rightarrow R$ ve $f(x) = \sin(\pi x)$ gibi tanımlanan f fonksiyonu $D(A)$ uzayından mıdır? Neden?

c) $g : [0, 1] \rightarrow R$ ve $g(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ fonksiyonu $D(A)$ uzayından olup olmadığını inceleyiniz.

2. B ile $L_2(0, \pi)$ uzayında

$$l(y) = -y'' + e^x y, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

diferansiyel ifadesinin ve $y'(0) = y'(\pi) = 0$ sınır koşullarının yardımı ile tanımlanan operatörü gösterelim. Bu operatörün $D(B)$ tanım kümesini yazınız.