KONU 3. LAGRANGE EŞİTLİĞİ

$L_2(0,\pi)$ uzayında tanımlı Sturm-Liouville operatörünü L ile gösterelim.

$$D(L)=\left\{\begin{array}{ll} & 1.\ y^{''}\ \text{mevcut} \\ y, \quad y\in L_2(0,\pi) & 2.\ l(y)\in L_2(0,\pi) \\ & 3.\ y^{'}(0)-hy(0\ )=0 \\ & y^{'}(\pi)+Hy(\pi)=0 \end{array}\right\}$$

Tanım 3.1. Her $y_1, y_2 \in D(L)$ için

$$W_x[y_1,y_2]=y_1(x)\,y_2^{'}(x)-y_1^{'}(x)\,y_2(x)$$

ifadesine y_1 ve y_2 fonksiyonlarının Wronskiyeni denir. Bilindiği gibi

$$\begin{aligned} L_1(0,\pi) &= \left\{f:\int_0^\pi |f(x)|\,dx<\infty\right\} \\ L_2(0,\pi) &= \left\{f:\int_0^\pi |f(x)|^2\,dx<\infty\right\} \end{aligned}$$

$L_1(0,\pi)$ ve $L_2(0,\pi)$ uzaylarındaki fonksiyonlar kompleks değerli fonksiyonlar olabilir. Ayrıca $L_2(0,\pi)$ uzayı bir Hilbert uzayıdır ve iç çarpım

$$(f,g):=\int_0^\pi f(x)\,\overline{g(x)}dx$$

olarak tanımlanır.

Teorem 3.2. Her $f,g\in C^2[0,\pi]$ için

$$(Lf,g)=W_\pi[f,\overline{g}]-W_0[f,\overline{g}]+(f,Lg)$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat.

$$\begin{aligned} (Lf,g) &= (l(f),g)=\int_0^\pi l(f)\,\overline{g(x)}dx=\int_0^\pi\left[-f^{''}+q(x)\,f\right]\overline{g(x)}dx \\ &= \int_0^\pi q(x)\,f(x)\,\overline{g(x)}dx-\int_0^\pi f^{''}(x)\,\overline{g(x)}dx \\ &= \int_0^\pi q(x)\,f(x)\,\overline{g(x)}dx-\int_0^\pi \overline{g(x)}df^{'}(x) \\ &= \int_0^\pi q(x)\,f(x)\,\overline{g(x)}dx-\left[f^{'}(x)\,\overline{g(x)}|_0^\pi-\int_0^\pi f^{'}(x)\,d\overline{g(x)}\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\pi q(x) f(x) \overline{g(x)} dx - \left[f'(x) \overline{g(x)}|_0^\pi - \int_0^\pi \overline{g'(x)} df(x) \right] \\
&= \int_0^\pi q(x) f(x) \overline{g(x)} dx - \left[f'(x) \overline{g(x)}|_0^\pi + f(x) \overline{g'(x)}|_0^\pi \right] - \int_0^\pi f(x) \overline{g''(x)} dx \\
&= W_\pi [f, \overline{g}] - W_0 [f, \overline{g}] + \int_0^\pi f(x) \overline{[-g''(x) + q(x) g(x)]} dx \\
&= W_\pi [f, \overline{g}] - W_0 [f, \overline{g}] + (f, Lg)
\end{aligned}
$$

Teorem 3.3. Her $f, g \in D(L)$ için

$$W_\pi [f, \overline{g}] = W_0 [f, \overline{g}] = 0$$

gerçeklenir.

İspat. $f, g \in D(L)$ olduğundan

$$\begin{cases} f'(0) = hf(0) \\ f'(\pi) = -Hf(\pi) \end{cases}, \quad \begin{cases} g'(0) = hg(0) \\ g'(\pi) = -Hg(\pi) \end{cases}$$

sağlanır. Sonuncu eşitliklerden

$$
\begin{aligned}
W_\pi [f, \overline{g}] &= f(\pi) \overline{g'(\pi)} - f'(\pi) \overline{g(\pi)} \\
&= f(\pi) H\overline{g(\pi)} - Hf(\pi) \overline{g(\pi)} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Benzer biçimde

$$W_0 [f, \overline{g}] = 0$$

ispatlanır.

Sonuç 3.4. Her $f, g \in D(L)$ için

$$(Lf, g) = (f, Lg) \tag{3.1}$$

sağlanır.

(3.1) eşitliğine Lagrange eşitliği denir.

Alıştırmalar

1. A ile $L_2(0,1)$ uzayında

$$l_0(y) = -y'', \quad 0 \le x \le 1$$

diferansiyel ifadesinin ve $y(0) = y'(1) = 0$ sınır koşullarının yardımı ile tanımlanan operatörü ve bu operatörün tanım kümesini $D(A)$ ile gösterelim.

Her $y_1, y_2 \in D(A)$ için

$$(Ay_1, y_2) = (y_1, Ay_2)$$

olduğunu ispatlayınız.

2.

$$-y^{''}+q\left(x\right)y=0,\quad 0\leq x\leq\pi \tag{3.2}$$

diferansiyel denkleminin iki y_1 ve y_2 çözümlerinin Wronskiyenlerinin x' den bağımsız olduğunu ispatlayınız.

3. (3.2) denkleminin iki $y_1$ve y_2 çözümlerinin lineer bağımlı olması için gerek ve yeter koşul

$$W\left[y_1,y_2\right]=0$$

olduğunu gösteriniz.