KONU 4. ÖZDEĞERLER ve ÖZFONKSİYONLAR

Tanım 4.1. $L : L_2(0,\pi) \to L_2(0,\pi)$ operatörünün tanım kümesi $D(L)$ olmak üzere

$$Ly = \lambda y, \quad y \in D(L) \tag{4.1}$$

denkleminin $\lambda = \lambda_0$ kompleks sayısı için $y_0 \neq 0$ çözümü mevcut ise λ_0 sayısına L operatörünün özdeğeri, y_0 fonksiyonuna ise λ_0 sayısına karşılık gelen özfonksiyonu denir. L operatörünün tanımını kullanarak (4.1) denklemini aşağıdaki gibide yazabiliriz.

$$-y'' + q(x)\, y = \lambda y, \quad 0 \leq x \leq \pi \tag{4.2}$$

$$\begin{cases} y'(0) - hy(0) = 0 \\ y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

Tanım 4.2. Eğer $\lambda = \lambda_0$ kompleks sayısı için $(4.2) - (4.3)$ sınır değer probleminin $y(x,\lambda_0) \neq 0$ çözümü mevcut ise λ_0 sayısına L operatörünün özdeğeri, $y(x,\lambda_0)$ fonksiyonuna ise λ_0 sayısına karşılık gelen özfonksiyonu adı verilir.

Teorem 4.3. L Sturm-Liouville operatörünün tüm özdeğerleri reeldir.

İspat. λ_0 sayısı L operatörünün bir özdeğeri, y_0 ise bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyonu olsun. Yani

$$Ly_0 = \lambda_0 y_0$$

gerçeklensin. Lagrange eşitliğinde $f = g = y_0$ olmak üzere

$$(Ly_0, y_0) = (y_0, Ly_0)$$

elde edilir. Sonuncu eşitlikten ise

$$\lambda(y_0, y_0) - \overline{\lambda_0}(y_0, y_0) = 0$$

çıkar. Buradan

$$\left(\lambda - \overline{\lambda_0}\right) ||y_0||^2 = 0$$

olur. Bu ise $\lambda = \overline{\lambda}$ anlamına gelir, yani $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

Teorem 4.4. L operatörünün farklı özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar diktir.

İspat. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sayıları L operatörünün iki özdeğeri ve y_1, y_2 ise sırasıyla bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ise,

$$\begin{aligned} Ly_1 &= \lambda_1 y_1 \\ Ly_2 &= \lambda_2 y_2 \end{aligned}$$

gerçeklenir. Lagrange eşitliğinde $f = y_1$ ve $g = y_2$ olmak üzere

$$(Ly_1, y_2) = (y_1, Ly_2)$$

olur. Buradan

$$\lambda_1 (y_1, y_2) = \lambda_2 (y_1, y_2)$$

veya

$$(\lambda_1 - \lambda_2) (y_1, y_2) = 0$$

elde edilir. Buradan ise

$$(y_1, y_2) = 0$$

çıkar, yani $y_1 \perp y_2$ olur.

Alıştırmalar

1. $L_2 (0, 2)$ uzayında

$$l (y) := -y^{''} + \ln (1 + x) y, \quad 0 \leq x \leq 2$$

diferansiyel ifadesinin ve

$$\begin{cases} y^{'} (0) - 2y (0) = 0 \\ y^{'} (\pi) + 5y (\pi) = 0 \end{cases}$$

sınır koşullarının yardımı ile tanımlanan operatör T olsun.

a) $D (T)$ tanım kümesini yazınız.

b) $\forall y_1, y_2 \in D (T)$ için

$$(Ty_1, y_2) = (y_1, Ty_2)$$

olduğunu ispatlayınız.

c) T operatörünün tüm özdeğerlerinin reel olduğunu gösteriniz.

d) T operatörünün farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlarının ortogonal olduğunu ispatlayınız.