KONU 5. POZİTİF OPERATÖRLER

Tanım 5.1. H Hilbert uzayı, her $f, g \in H$ için (f, g) bu uzayda skaler çarpım, A ise tanım kümesi $D(A) \subset H$ olan ve H uzayında tanımlı bir operatör olmak üzere, her $f \in D(A)$ için

$$(Af, f) \geq 0$$

ise A operatörüne pozitif operatör denir.

Teorem 5.2. Bir Hilbert uzayında tanımlı bir pozitif operatörünün tüm özdeğerleri pozitiftir.

İspat. $A : H \to H$ olmak üzere A pozitif olsun. λ_0 ile A operatörünün keyfi bir özdeğerini, y_0 ile bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyonunu gösterelim.

$$(Ay_0, y_0) \geq 0$$

olduğundan

$$\lambda_0 (y_0, y_0) \geq 0$$

buradan ise $\lambda_0 \geq 0$ elde edilir.

Örnek 5.3. $L_2(0, \pi)$ uzayında

$$l_0(y) = -y^{''}, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

diferansiyel ifadesinin ve

$$y(0) = y(\pi) = 0$$

sınır koşullarının yardımı ile tanımlanan operatör L_0 olmak üzere, L_0' ın pozitif olduğunu ispatlayınız.

Çözüm.

$$D(L_0) = \left\{ y, \quad y \in L_2(0,\pi) \quad \begin{array}{c} 1.\ y^{''} \text{ mevcut} \\ 2.\ y^{''} \in L_2(0,\pi) \\ 3.\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{array} \right\}$$

Her $f \in D(L_0)$ için

$$\begin{aligned} (L_0 f, f) &= \int_0^\pi \left[-f^{''}(x)\right] \overline{f(x)} dx = -\int_0^\pi \overline{f(x)} df^{'}(x) \\ &= -f^{'}(x)\,\overline{f(x)}\Big|_0^\pi + \int_0^\pi f^{'}(x)\, d\overline{f(x)} \\ &= -f^{'}(\pi)\,\overline{f(\pi)} + f^{'}(0)\,\overline{f(0)} + \int_0^\pi f^{'}(x)\, \overline{f^{'}(x)} dx \end{aligned}$$

sınır koşullarını kullanarak

$$(L_0 f, f) = \int_0^\pi \left| f'(x) \right|^2 dx \geq 0$$

elde edilir, yani L_0operatörü pozitiftir.

Teorem 5.4. Eğer $q \geq 0, h \geq 0, H \geq 0$ ise bu durumda L Sturm-Liouville operatörü pozitiftir.

İspat.

$$D(L) = \left\{ \begin{array}{lll} y, & y \in L_2(0,\pi) & \begin{array}{l} 1.\ y'' \text{ mevcut} \\ 2.\ -y'' + q(x) y \in L_2(0,\pi) \\ 3.\ y'(0) - hy(0) = 0 \\ y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \end{array} \end{array} \right\}$$

$\forall f \in D(L)$ için

$$\begin{aligned} (Lf, f) &= \int_0^\pi \left[-f'' + q(x) f \right] \overline{f} dx = -\int_0^\pi f'' \overline{f} dx + \int_0^\pi q(x) |f|^2 dx \\ &= -\int_0^\pi \overline{f(x)} df'(x) + \int_0^\pi q(x) |f(x)|^2 dx \\ &= -f'(x) \overline{f(x)} \big|_0^\pi + \int_0^\pi \left| f'(x) \right|^2 dx + \int_0^\pi q(x) |f(x)|^2 dx \\ &= -f'(\pi) \overline{f(\pi)} + f'(0) \overline{f(0)} + \int_0^\pi \left[\left| f'(x) \right|^2 + q(x) |f(x)|^2 \right] dx \\ &= H |f(\pi)|^2 + h |f(0)|^2 + \int_0^\pi \left[\left| f'(x) \right|^2 + q(x) |f(x)|^2 \right] dx \geq 0 \end{aligned}$$

Yani L operatörü pozitiftir. Genel olarak pozitif operatörler $A \geq 0$ olarak gösterilir.

Alıştırmalar

1) $L_2(0,1)$ uzayında

$$l_0(y) = -y'', \quad 0 \leq x \leq 1$$

diferansiyel ifadesinin ve

$$y'(0) = y(1) = 0$$

sınır koşullarının yardımı ile tanımlanan operatör T olsun.

a) $D(T)$ tanım kümesini yazınız.

b) $T \geq 0$ olduğunu ispatlayınız.