

KONU 6. ÖZDEĞER ve ÖZFONKSİYONLARA AİT ÖRNEKLER

Soru 6.1. $L_2(0, \pi)$ uzayında

$$l_0(y) = -y'', \quad 0 \leq x \leq \pi$$

diferansiyel ifadesinin ve

$$y(0) = y(\pi) = 0$$

sınır koşullarının yardımı ile tanımlanan L_0 operatörlerinin özdeğerlerini ve özfonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm.

$$L_0 y = \lambda y,$$

veya

$$-y'' = \lambda y, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (6.1)$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

(6.1) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x, \quad |c_1| + |c_2| \neq 0$$

sınır koşullarından

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \iff c_1 = 0 \implies c_2 \neq 0 \\ y(x) &= c_2 \sin \sqrt{\lambda}x, \quad c_2 \neq 0 \\ y(\pi) &= 0 \implies c_2 \sin \sqrt{\lambda}\pi = 0 \implies \sin \sqrt{\lambda}\pi = 0 \\ \sqrt{\lambda_n} &= \pi n, \quad n \in Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \\ \lambda_n &= n^2, \quad n \in N = \{0, 1, 2, \dots\} \end{aligned}$$

$\lambda_0 = 0$ ise $-y'' = 0$ olur.

$$y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = x$$

elde edilir. Fakat ne $y_1(x)$, ne de $y_2(x)$ çözümleri sınır koşullarını gerçekleştiriyor. Dolayısıyla $\lambda_0 = 0$ bir özdeğer değildir.

$\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, \dots$ ise özdeğer olur. Bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ise

$$y_n(x) = y_n(x, \lambda_n) = \sin nx$$

fonksiyonları olur.

$$\begin{array}{cccccc} \lambda_n & 1 & 4 & 9 & n^2 & \rightarrow \text{özdeğerler} \\ y_n & \sin x & \sin 2x & \sin 3x & \sin nx & \rightarrow \text{özfonksiyonlar} \end{array}$$

Alıştırmalar

1. $L_2(0, \pi)$ uzayında

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y, & 0 \leq x \leq \pi \\ y'(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

sınır değer problemlerinin özdeğerlerini ve özfonksiyonlarını bulunuz.

2. $L_2(0, 1)$ uzayında

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y, & 0 \leq x \leq 1 \\ y'(0) = y'(1) = 0 \end{cases}$$

sınır değer probleminin özdeğerlerini ve özfonksiyonlarını bulunuz.

3. $L_2(0, a)$, $a > 0$

$$l_0(y) = -y'', \quad 0 \leq x \leq a$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y'(0) = y(a) = 0$$

sınır koşullarının yardımı ile üretilen operatör T olmak üzere

- a) $D(T)$ tanım kümesini yazınız.
- b) $T \geq 0$ olduğunu gösteriniz.
- c) T operatörünün özdeğerlerini ve özfonksiyonlarını bulunuz.